Lecciones populares de matemáticas

PROBLEMAS ELEMENTALES DE MÁXIMO Y MÍNIMO

SUMA DE CANTIDADES INFINITAMENTE PEQUEÑAS

I. P. Natansón

Editorial MIR



Moscú


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

И. П. НАТАНСОН

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«НАУКА»

LECCIONES POPULARES DE MATEMATICAS

I. P. NATANSON

PROBLEMAS ELEMENTALES DE MAXIMO Y MINIMO

SUMA DE CANTIDADES INFINITAMENTE PEQUEÑAS

Editorial Mir Moscú
Rubiños 1860 - MADRID

TRADUCIDO DEL RUSO POR
VIRGILIO LLANOS MAS

На испанском языке

IMPRESO EN LA URSS
1977

INDICE

Problemas elementales de máximo y mínimo 7
Prefacio 8
Introducción 9
I. Teorema fundamental de los trinomios cuadráticos 11
II. Algunas aplicaciones del teorema fundamental 16
III. Otros teoremas que permiten calcular los valores máximos y mínimos de las funciones 26
Conclusión 41
Suma de cantidades infinitamente pequeñas 43
Prefacio 44
§ 1. Algunas fórmulas del álgebra 45
§ 2. Cálculo de la presión de un líquido sobre una pared vertical 51
§ 3. Cálculo del trabajo para extraer un líquido de los recipientes 61
§ 4. Cálculo de volúmenes 70
§ 5. La parábola y la elipse 86
§ 6. La sinusoide 93
Ejemplos para ejercicios 106

PROBLEMAS ELEMENTALES DE MAXIMO Y MINIMO

PREFACIO

En este libro se exponen algunos procedimientos elementales (es decir, que no requieren el conocimiento del cálculo diferencial) para la solución de problemas de máximo y mínimo.

La obra está destinada a los alumnos de los grados superiores de la escuela secundaria que deseen adquirir algunas nociones respecto al carácter de los problemas que se examinan en las matemáticas superiores. El material que se expone puede utilizarse en el trabajo de los círculos matemáticos escolares.

No obstante, la lectura de este libro también será provechosa para los estudiantes de escuelas superiores técnicas, institutos pedagógicos o universidades, incluso si tienen ciertos conocimientos de análisis matemático. El potente aparato de cálculo diferencial suministra procedimientos generales y de un mismo tipo que permiten resolver problemas de carácter muy diverso, donde se requiera hallar el extremo de la combinación final de funciones elementales. Empleando dichos procedimientos no hay necesidad de prestar atención a la peculiaridad individual de uno u otro problema. Pero precisamente el empleo de esta peculiaridad permite con frecuencia resolver el problema de manera más simple, más rápida y más bonita que con ayuda de los métodos generales. La situación es semejante a la de los problemas aritméticos, pues el empleo del potente aparato de ecuaciones algebraicas permite despreciar las particularidades individuales de tales problemas, pero la solución puramente aritmética a menudo resulta más sencilla, más rápida y más bonita que la algebraica.

La variedad de medios algebraicos que se utilizan en este libro, es muy limitada: se emplean solamente las propiedades más simples del trinomio cuadrático y la desigualdad referente a las medias aritmética y geométrica. Esto se ha hecho para simplificar la exposición. Al lector que desee profundizar en el tema y conocer procedimientos más estrictos, aunque elementales, de solución de problemas de máximo y mínimo se le pueden recomendar los libros: *I. B. Abelson*, Máximo y mínimo, ONTI, 1935 y *S. I. Zetel*, Problemas de máximo y mínimo en ruso, Gostejizdat, 1948.

I. Natansón

17/XII 1949

INTRODUCCION

En la técnica y en las ciencias naturales, en la producción y en la vida cotidiana, se encuentra un tipo especial de problemas matemáticos, denominados «problemas de máximo y mínimo». He aquí algunos ejemplos:

1) De un tronco es menester cortar una viga rectangular de tal forma que se obtenga una cantidad mínima de desechos.

2) Con las tablas disponibles se puede construir una valla de 200 m de longitud. Se requiere cercar con esta valla una parcela rectangular de tierra que tenga un área máxima.

3) En la pared hay un cuadro. ¿A qué distancia de la pared se ve dicho cuadro bajo un ángulo máximo?

4) ¿A qué altura se debe colgar una lámpara para obtener iluminación máxima?

En todos estos problemas, a pesar de la diferencia existente entre ellos, encontramos rasgos comunes: se trata siempre de la forma de obtener un efecto óptimo dentro de las diversas posibilidades de utilización de los medios disponibles. Sobra señalar la importancia de la habilidad de resolver tales cuestiones. En las matemáticas se han creado procedimientos estrictos y generales, estudiados en el cálculo diferencial, para la solución de problemas semejantes.

Sin embargo, en muchos casos, se logran resolver estos problemas sin utilizar un complicado aparato de cálculo diferencial, empleando solamente los medios simples de álgebra elemental. Precisamente en este libro se exponen varios métodos para la solución de problemas de máximo y mínimo sin la ayuda de las matemáticas superiores*). Claro está, semejantes procedimientos son aplicables solamente en casos aislados, pero su conocimiento es útil incluso para aquellos que saben cálculo diferencial.

---

*) En particular, se resuelven los cuatro problemas expuestos anteriormente.

I. TEOREMA FUNDAMENTAL DE LOS TRINOMIOS CUADRATICOS

§ 1. Examinemos dos magnitudes x e y relacionadas por la igualdad

$$y = 2x^2 + 7. \tag{1}$$

Si suponemos que $x = 3$, veremos que $y = 25$. Si damos a x el valor de $x = 10$, obtendremos $y = 207$. A la magnitud x, en general, es posible darle cualquier valor, pero cuando lo hayamos elegido, y adquirirá «automáticamente» un valor específico, determinado por la igualdad (1) y ya no dependerá de ninguna arbitrariedad. Esta situación se caracteriza matemáticamente diciendo que y es la *función* de x. La magnitud x se denomina *variable independiente*.

Veamos si existe o no, entre los valores que adquiere la función y [determinada por la igualdad (1)], un *valor máximo*. Es fácil notar que *no existe* tal valor entre los valores de y. En efecto, si la variable independiente x adquiere los valores

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 10, \quad x_3 = 100, \quad x_4 = 1000, \ldots,$$

los valores correspondientes de la función y serán

$$y_1 = 9, \quad y_2 = 207, \quad y_3 = 20\,007, \quad y_4 = 2\,000\,007, \ldots,$$

de donde se ve que y *no tiene* un valor máximo.

La respuesta será absolutamente diferente si nos preguntamos: ¿existe o no entre los valores de la función y uno que sea *menor*?

Efectivamente, como lo demuestra la igualdad (1), la función y es una suma de dos sumandos: $2x^2$ y 7. El segundo de éstos, es decir, 7, es un número constante que no depende de los valores de x. En cuanto al primer sumando, $2x^2$, no puede ser negativo, es decir, *menor* de cero con ningún valor de x*. No obstante, este primer sumando $2x^2$ puede ser *igual* a cero cuando $x = 0$. Así, el primer sumando $2x^2$, y con él toda la suma $2x^2 + 7$, adquiere su valor mínimo cuando $x_0 = 0$. Este valor mínimo es por lo visto 7, lo que se escribe:

$$y_{\min} = 7.$$

*) No se consideran números imaginarios.

Razonamientos análogos permiten demostrar que cada una de las funciones

$$y=5x^2+3, \quad y=9x^2+4\,y, \quad =2x^2-5, \quad y=3x^2-11$$

tiene propiedades semejantes: no tienen valor máximo, pero sí mínimo, y en todas las cuatro funciones este valor mínimo se alcanza cuando $x_0 = 0$ y es, respectivamente, igual a

$$y_{\min}=3, \quad y_{\min}=4, \quad y_{\min}=-5, \quad y_{\min}=-11.$$

§ 2. Los ejemplos que acabamos de examinar son muy simples. El origen de esta simplicidad se basa en el hecho de que la función y se representó en forma de una suma de dos miembros, uno de los cuales era *constante*, mientras que el otro, al ser un *cuadrado* (con coeficiente positivo), no podía resultar negativo.

La situación se complica si se plantea el ejemplo

$$y = 2x^2 - 12x + 93.$$

Para poder aplicar la idea utilizada anteriormente, escribiremos y en la forma:

$$y = 2\,(x^2 - 6x) + 93.$$

A continuación añadiremos en los paréntesis un número que complete el cuadrado del binomio:

$$y = 2\,(x^2 - 6x + 9) + 93 - 18,$$

o

$$y = 2\,(x-3)^2 + 75.$$

Ahora podemos aplicar las consideraciones mencionadas más arriba. En realidad, la función y está representada en forma de una suma de dos miembros, uno de los cuales, precisamente 75, no depende en absoluto de x, y el otro, $2\,(x-3)^2$, nunca es negativo, pero es cero cuando $x = 3$. Por eso, nuestra función alcanza un valor mínimo $y_{\min} = 75$ cuando $x = 3$.

El valor máximo de esta función no existe, lo que es fácil de demostrar si suponemos, por ejemplo, que

$$x_1 = 13, \quad x_2 = 103, \quad x_3 = 1003, \ \ldots$$

Los valores respectivos de la función y serán

$$y_1 = 275, \quad y_2 = 20\,075, \quad y_3 = 2\,000\,075, \ \ldots$$

De manera análoga se resuelve el ejemplo

$$y = 3x^2 + 24x + 50.$$

Realizando transformaciones semejantes, tenemos:

$$y = 3(x^2 + 8x) + 50,$$
$$y = 3(x^2 + 8x + 16) + 50 - 48,$$
$$y = 3(x + 4)^2 + 2.$$

Por consiguiente, la función y adquiere un valor mínimo cuando $x_0 = -4$, y este valor mínimo es

$$y_{\text{mín}} = 2.$$

He aquí otro ejemplo:

$$y = 5x^2 - 50x + 39.$$

Aquí

$$x_0 = 5, \quad y_{\text{mín}} = -86,$$

(en lo sucesivo designaremos siempre mediante x_0 aquel valor de la variable independiente que corresponde al valor mínimo de la función).

§ 3. No se debe suponer que todo trinomio cuadrático (así se denomina el tipo de función que examinamos) tiene valor mínimo y carece de valor máximo.

Por ejemplo, la función

$$y = -3x^2 + 8$$

tiene un valor máximo

$$y_{\text{máx}} = 8,$$

cuando $x_0 = 0$. Por el contrario, dicha función no tiene valor mínimo.

De igual manera en la función

$$y = -4x^2 + 40x - 73$$

no existe un valor mínimo, pero sí un valor máximo, lo que se demuestra realizando las transformaciones siguientes:

$$y = -4(x^2 - 10x) - 73,$$
$$y = -4(x^2 - 10x + 25) - 73 + 100,$$
$$y = -4(x - 5)^2 + 27,$$

de donde, siendo $x_0 = 5$, se obtiene

$$y_{\text{máx}} = 27.$$

§ 4. Así pues, ciertos trinomios cuadráticos tienen valor mínimo, pero carecen de valor máximo, mientras que otros, por el contrario, tienen valor máximo y no tienen valor mínimo. Es sencillo advertir que el carácter del trinomio queda determinado *por el signo* del coeficiente de la x con exponente mayor. A fin de establecer esto con toda rigurosidad, examinaremos el problema en rasgos generales.

Supongamos que tenemos el trinomio cuadrático

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Aquí los coeficientes pueden ser cualesquiera números reales: positivos y negativos e, incluso, convertirse en cero. No obstante, el coeficiente *superior* a debe ser siempre distinto de cero, ya que de lo contrario y no incluiría un miembro con x^2 y no sería un trinomio *cuadrático*.

Transformaremos y de la siguiente manera:

$$y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x\right) + C,$$

$$y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + C - \frac{b^2}{4a}.$$

Suponiendo para brevedad que

$$c - \frac{b^2}{4a} = M,$$

obtendremos definitivamente:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + M.$$

Es importante señalar que M es un número constante determinado plenamente por los coeficientes a, b y c, y que no depende en absoluto de los valores de la variable independiente x.

Analicemos dos casos.

1) Si $a > 0$, el primer sumando $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ no será nunca negativo, pero si

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

éste se convierte en cero. Por eso, la función y tiene un valor mínimo igual a M:

$$y_{\text{mín}} = M,$$

y carece de valor máximo.

2) Si $a < 0$, por razones idénticas resulta que

$$y_{\text{máx}} = M,$$

además, este valor se alcanza cuando

$$x_0 = -\frac{b}{2a},$$

y no existe $y_{\text{mín}}$.

Tanto el valor mínimo de la función como su valor máximo se denominan valores *extremos*. Por consiguiente, todo lo dicho puede ser resumido en el teorema fundamental que dice:

TEOREMA. *El trinomio cuadrático*

$$y = ax^2 + bx + c$$

tiene un valor extremo que lo adquiere cuando

$$\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}}.$$

Este valor resulta mínimo si $a > 0$, *máximo si* $a < 0$. *Si existe* $y_{\text{máx}}$, *no existe* $y_{\text{mín}}$, *y viceversa.*

Como hemos visto, este valor extremo es siempre igual a

$$y_{\text{ext}} = M,$$

o más detalladamente

$$y_{\text{ext}} = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Sin embargo, *no es preciso* memorizar esta última igualdad, ya que es el valor de nuestro trinomio cuando

$$x = x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Entonces, para obtener la magnitud y_{ext}, es suficiente sustituir x en el trinomio por el número

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

EJEMPLOS.

$$y=3x^2-12x+8, \qquad x_0=2, \qquad y_{\text{mín}}=-4;$$
$$y=-2x^2+8x-3, \qquad x_0=2, \qquad y_{\text{máx}}=5;$$
$$y=2x^2+20x+17, \qquad x_0=-5, \qquad y_{\text{mín}}=-33.$$

II. ALGUNAS APLICACIONES DEL TEOREMA FUNDAMENTAL

§ 5. Veamos cómo el teorema demostrado en el § 4 permite resolver una gran diversidad de problemas concretos.

PROBLEMA 1. *Descomponer el número positivo A en dos componentes de tal manera que el producto de éstos sea máximo.*

SOLUCION. Designemos por x uno de los sumandos incógnitos. Entonces el segundo sumando será igual a $A-x$, y su producto

$$y = x\,(A-x)$$

o

$$y = -x^2 + Ax.$$

De esta manera, se debe hallar un valor de x que dé a este trinomio cuadrático un valor máximo. Según el teorema del § 4, semejante valor existe (ya que aquí el coeficiente de la x con exponente superior es igual a -1, es decir, es negativo) y es igual a

$$x_0=\frac{A}{2}.$$

En este caso

$$A-x_0=\frac{A}{2}$$

y, por consiguiente, ambos sumandos deben ser iguales.

Por ejemplo, el número 30 admite las siguientes descomposiciones:

$$30 = 5 + 25, \qquad 5\cdot 25 = 125$$
$$30 = 7 + 23, \qquad 7\cdot 23 = 161,$$
$$30 = 13 + 17, \qquad 13\cdot 17 = 221,$$
$$30 = 20 + 10, \qquad 20\cdot 10 = 200,$$
$$30 = 29 + 1, \qquad 29\cdot 1 = 29,$$
$$30 = 30 + 0, \qquad 30\cdot 0 = 0.$$

Todos los productos obtenidos son inferiores a $15 \cdot 15 = 225$.

§ 6. PROBLEMA 2. *Tenemos un alambre de longitud l. Se requiere doblarlo de tal manera que se obtenga un rectángulo que limite el mayor área posible.*

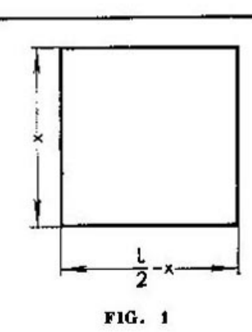


FIG. 1

SOLUCION. Designemos por x (fig. 1) uno de los lados del rectángulo. Entonces el otro lado será $\frac{l}{2} - x$, y el área

$$S = x\left(\frac{l}{2} - x\right),$$

o

$$S = -x^2 + \frac{l}{2}x.$$

Esta función adquiere su valor máximo cuando

$$x_0 = \frac{l}{4},$$

y este valor será el buscado para uno de los lados del rectángulo. Su otro lado, entonces, será

$$\frac{l}{2} - x_0 = \frac{l}{4},$$

es decir, el rectángulo resulta ser un *cuadrado*. La solución puede ser resumida en el teorema siguiente:

TEOREMA. *De todos los rectángulos de igual perímetro el cuadrado tiene área máxima.*

OBSERVACIONES. 1) Este problema también puede ser resuelto fácilmente con ayuda del resultado obtenido al

resolver el problema 1. Evidentemente, el área del rectángulo es

$$S = x\left(\frac{l}{2} - x\right).$$

En otras palabras, S es el producto de dos factores: x y $\frac{l}{2} - x$. Pero la *suma* de estos dos factores es

$$x + \left(\frac{l}{2} - x\right) = \frac{l}{2},$$

es decir, es un número que no depende de la elección de x. Por consiguiente, la operación se reduce a la descomposición del número $\frac{l}{2}$ en dos sumandos, de tal manera que el producto de éstos sea máximo. Como ya sabemos, este producto será máximo cuando los sumandos sean iguales entre sí, es decir, cuando $x = \frac{l}{4}$.

2) Si designamos por l la longitud de la valla que se puede construir con las tablas de que disponemos, y no la longitud del alambre, nuestro teorema nos proporciona la solución del *segundo* de los cuatro problemas prácticos mencionados en la «Introducción» (allí se señalaba que $l = 200$ m). En el § 7 se examina una variante algo modificada del problema.

§ 7. PROBLEMA 3. *Con las tablas de que disponemos se puede construir una valla de* 200 m *de longitud. Se requiere cercar con ésta un patio rectangular de área máxima utilizando como uno de sus lados la pared de la fábrica.*

SOLUCIÓN. Designemos (fig. 2) uno de los lados del patio por x. Entonces el otro lado será igual a $200 - 2x$, y su área será

$$S = x(200 - 2x),$$

o

$$S = -2x^2 + 200x.$$

De acuerdo con el teorema del § 4, el valor máximo de esta función se alcanza cuando

$$x_0 = 50.$$

Así pues, el lado del patio, perpendicular a la pared de la fábrica, debe ser igual a 50 m, de donde se obtiene para el

lado paralelo a la pared el valor de 100 m, es decir, el patio debe tener la forma de medio cuadrado.

OBSERVACIÓN. Si hubiésemos querido utilizar aquí también el resultado de la solución del problema 1, no lo habríamos logrado, ya que

$$S = x\,(200 - 2x)$$

es el producto de dos factores cuya suma es igual a $200 - x$, o sea, *depende de* x. Por lo tanto, no tenemos las condiciones del problema 1. No obstante, recurriendo a un pequeño

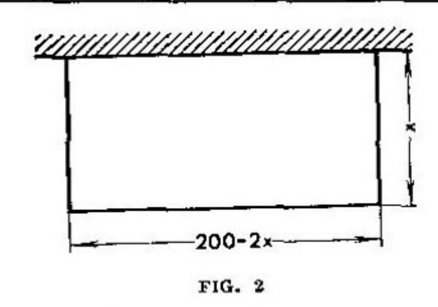


FIG. 2

subterfugio, podemos hacerlas concordar con las del problema 1. En efecto, examinemos en lugar de S la magnitud $z = 2S$. Ya que

$$z = 2x\,(200 - 2x),$$

resulta que *esta* función es el producto de dos factores cuya suma ya no depende de x y, por consiguiente, $z_{\text{máx}}$ se alcanza cuando

$$2x = 200 - 2x,$$

de donde $x = 50$. Queda por señalar que las funciones S y $z = 2S$ alcanzan sus valores máximos con un mismo valor de x.

§ 8. PROBLEMA 4. *Se da el cuadrado ABCD* (fig. 3). *Desde sus vértices se trazan segmentos iguales Aa, Bb, Cc, Dd y los puntos a, b, c, d se unen con rectas. ¿Con qué valor de Aa resultará mínima el área del cuadrado abcd?*

SOLUCIÓN. Si suponemos que

$$Aa = x$$

resultará, como es obvio, que

$$aB = l - x,$$

donde $l = AB$ y, por consiguiente, según el teorema de Pitágoras,

$$\overline{ab}^2 = x^2 + (l - x)^2 = 2x^2 - 2lx + l^2.$$

Pero el área S del cuadrado $abcd$, precisamente, es igual a $\overline{ab}^2$. Es decir,

$$S = 2x^2 - 2lx + l^2.$$

Por eso, el valor mínimo de S se obtendrá cuando

$$x_0 = \frac{l}{2}.$$

De esta manera, los puntos a, b, c y d se deben colocar en los centros de los lados del cuadrado básico $ABCD$.

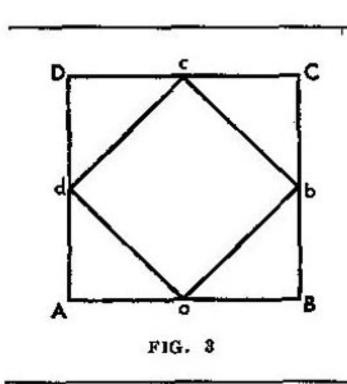


FIG. 3

§ 9. PROBLEMA 5. *De los puntos A y B* (fig. 4), *en las direcciones señaladas con flechas, salen simultáneamente un vapor y un yate. Sus velocidades, respectivamente, son iguales a*

$$v_V = 40 \text{ km/h},$$
$$v_Y = 16 \text{ km/h}.$$

¿Dentro de cuánto tiempo la distancia entre ellos será mínima, si

$$AB = 145 \text{ km?}$$

SOLUCIÓN. Indiquemos con las letras V e Y la posición del vapor y del yate transcurridas t horas después de su salida de los puntos A y B. Entonces

$$AV = 40t \text{ km}, \quad BY = 16t \text{ km},$$

y, por consiguiente, basándose en el teorema de Pitágoras,

$$VY = \sqrt{BV^2 + BY^2} = \sqrt{(145 - 40t)^2 + (16t)^2},$$

de donde

$$VY = \sqrt{1856t^2 - 11\,600t + 21\,025}.$$

Esta raíz adquirirá su valor mínimo con el mismo valor de

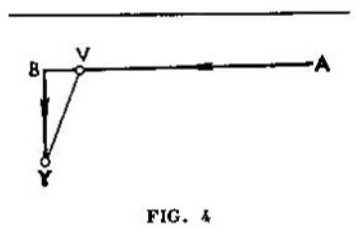


FIG. 4

t con el que la expresión bajo el radical tenga su valor mínimo

$$z = 1856t^2 - 11\,600t + 21\,025,$$

es decir, cuando

$$t = \frac{11\,600}{3712} = 3\,\frac{1}{8} \text{ hora}.$$

Así pues, el vapor y el yate resultarán estar a distancia mínima uno respecto al otro, transcurridas 3 horas 7 minutos y 30 segundos después de su salida de los puntos A y B.

§ 10. PROBLEMA 6. *Inscribir en el círculo dado un rectángulo de área máxima.*

SOLUCIÓN. Designemos por R el radio del círculo, y por x el lado AB del rectángulo incógnito (fig. 5). Según el teorema de Pitágoras resulta que

$$BC = \sqrt{4R^2 - x^2},$$

de donde, para el área S que nos interesa, se obtiene la expresión

$$S = x\sqrt{4R^2 - x^2}.$$

Esta función alcanza su valor máximo con la misma x que lo alcanza la función $y = S^2$. Pero

$$y = x^2 (4R^2 - x^2).$$

Suponiendo que $x^2 = z$, obtenemos:

$$y = z(4R^2 - z) = -z^2 + 4R^2z.$$

Por consiguiente, $y_{máx}$ se alcanza cuando $z = 2R^2$, es decir, cuando $x = R\sqrt{2}$. Este valor de x se podría haber calculado

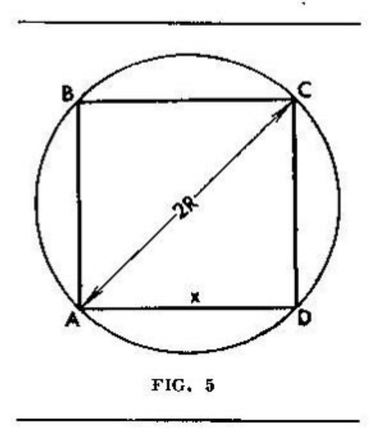


FIG. 5

sin introducir la magnitud z, basándose en el hecho de que y es el producto de dos factores cuya suma $4R^2$ es constante y, en virtud del resultado obtenido al resolver el problema 1,

$$x^2 = 2R^2 \quad \text{y} \quad x = R\sqrt{2}.$$

Ya que cuando $AB = x = R\sqrt{2}$

$$BC = R\sqrt{2},$$

vemos que el rectángulo que buscamos debe ser un cuadrado. De tal manera, hemos demostrado el teorema siguiente.

TEOREMA. *Entre todos los rectángulos inscritos en un mismo círculo el cuadrado tiene área máxima.*

OBSERVACIÓN. Si el círculo que se menciona en el problema es la sección transversal del tronco y el rectángulo inscrito es la sección de la misma viga que se requiere cortar de este tronco, nuestro problema geométrico, al parecer abstracto, se convierte en el *primero* de los cuatro problemas prácticos tratados en la «Introducción».

§ **11.** PROBLEMA 7. *Inscribir en la esfera dada, un cilindro de superficie lateral máxima.*

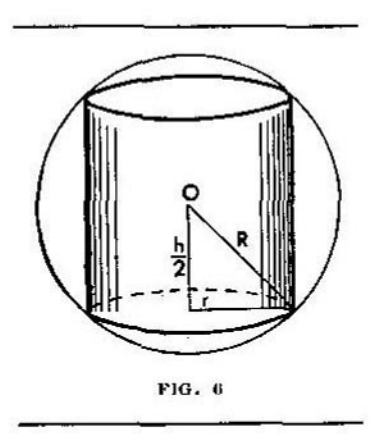


FIG. 6

SOLUCIÓN Designemos por R el radio de la esfera, y por r y h, respectivamente, el radio y la altura del cilindro incógnito (fig. 6). Entonces la superficie lateral del cilindro será

$$S = 2\pi rh.$$

Por otra parte, como se ve de la fig. 6, los segmentos R, r y $\frac{1}{2}h$ están relacionados en la forma

$$\frac{1}{4}h^2 + r^2 = R^2.$$

De ahí,

$$h = 2\sqrt{R^2 - r^2},$$

y, por consiguiente,

$$S = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Suponiendo, como en el problema anterior, que $y = S^2$, obtenemos:

$$y = 16\pi^2 r^2 (R^2 - r^2).$$

Si introducimos una nueva variable independiente $x = r^2$, y se expresará a través de ella de la manera siguiente:

$$y = 16\pi^2 x (R^2 - x),$$

de donde $y_{máx}$ se alcanza cuando $x_0 = \frac{R^2}{2}$, es decir, cuando

$$r = \frac{R}{\sqrt{2}} = R\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Conociendo r, hallamos fácilmente que $h = R\sqrt{2}$. Advirtiendo además que, para el cilindro que buscamos, $h = 2r$, vemos que la sección axial de este cilindro es un cuadrado.

§ **12.** PROBLEMA 8. *Inscribir en el cono dado, un cilindro de superficie lateral máxima.*

SOLUCIÓN. Designemos por R y H el radio de la base y la altura del cono dados, y por r y h el radio y la altura del

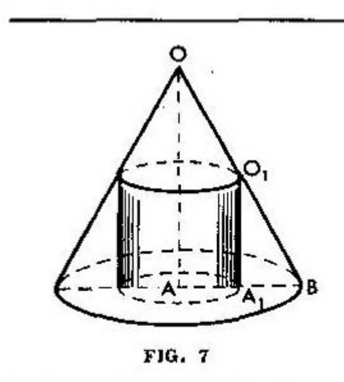


FIG. 7

cilindro incógnito. Entonces la superficie lateral del cilindro será

$$S = \pi rh.$$

Pero, de la similitud de los triángulos OAB y O_1A_1B (fig. 7), se deduce la proporción

$$\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R},$$

de donde

$$h = \frac{H}{R}(R - r)$$

y

$$S = 2\pi \frac{H}{R} r (R - r).$$

Esta función adquiere su valor máximo cuando $r_0 = \frac{1}{2} R$. De aquí, la altura del cilindro que buscamos es

$$h_0 = \frac{H}{R}(R - r_0) = \frac{1}{2} H.$$

§ **13.** PROBLEMA 9. *En el triángulo ABC* (fig. 8) *se debe trazar la recta ab, paralela a la base AB, de tal manera que el*

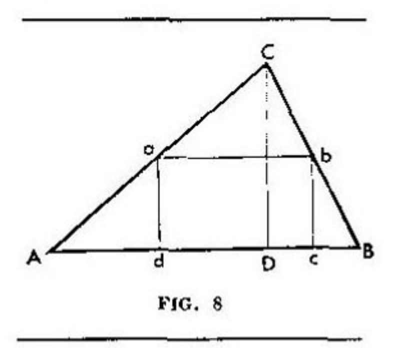


FIG. 8

área del rectángulo abcd sea máxima.

SOLUCION. Supongamos que

$$AB = L, \quad ab = l, \quad bc = h,$$

y designemos por H la altura CD del triángulo ABC trazada sobre el lado AB. De la semejanza de los triángulos ABC y abC se deduce la proporción

$$\frac{l}{L} = \frac{H - h}{H},$$

de donde

$$l = \frac{L}{H}(H - h).$$

Puesto que el área del rectángulo *abcd* que nos interesa es

$$S = hl,$$

resulta que

$$S = \frac{L}{H} h (H - h),$$

de donde $S_{máx}$ se alcanza cuando $h_0 = \frac{1}{2} H$.

III. OTROS TEOREMAS QUE PERMITEN CALCULAR LOS VALORES MAXIMOS Y MINIMOS DE LAS FUNCIONES

§ 14. Volvamos al problema 1, ya resuelto en el § 5. La solución obtenida nos conduce al teorema siguiente.

TEOREMA. *La media geométrica de dos números positivos no es mayor que la media aritmética de éstos*

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}. \qquad (2)$$

En efecto, supongamos que x e y son dos números positivos. Designemos su suma por A. La suma de los números $\frac{1}{2} A$ y $\frac{1}{2} A$ es la misma. Pero, puesto que estos dos últimos números son iguales entre sí, su producto (como se demostró en el § 5) es superior al de cualquier pareja de números cuya suma sea la misma y, en particular, al de los números x e y, es decir,

$$xy \leqslant \left(\frac{A}{2}\right)^2$$

(el signo de igualdad aparece al no excluirse la posibilidad de que $x = y = \frac{1}{2} A$). Recordando que $A = x + y$, vemos que

$$xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

y esto es equivalente a la desigualdad (2). La demostración realizada indica también que el *signo de igualdad en la relación* (2) *aparece cuando, y solamente cuando* $x = y$.

Este teorema también puede ser demostrado de otra manera, sin hacer referencia al § 5. Efectivamente, la desigualdad (2) se puede escribir de forma equivalente

$$0 \leqslant x - 2\sqrt{xy} + y,$$

y, en esta forma, es evidente, puesto que

$$x - 2\sqrt{xy} + y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0.$$

Esta demostración establece también el hecho de que en (2) la igualdad existe cuando, y solamente cuando $x = y$.

§ 15. PROBLEMA 10. *Descomponer el número positivo dado P en dos factores positivos de tal manera que su suma sea la mínima.*

SOLUCIÓN. Supongamos que P, de cualquier manera, está representado en forma de un producto de dos factores positivos x e y:

$$P = xy \quad (x > 0,\ y > 0).$$

Entonces, en virtud de la desigualdad (2), resulta que

$$x + y \geqslant 2\sqrt{P}.$$

De tal manera, para cualquier elección de factores, su suma no puede ser *menor* que $2\sqrt{P}$. Pero, aceptando que éstos son *iguales*, es decir, suponiendo que $x = \sqrt{P}$, $y = \sqrt{P}$, llegamos de manera evidente a la suma *igual a* $2\sqrt{P}$. Así pues, $2\sqrt{P}$ es el valor mínimo de la suma que nos interesa, valor que dicha suma alcanza cuando, y solamente cuando ambos factores son iguales entre sí*).

Si prestamos atención al hecho de que $y = \frac{P}{x}$, la solución que hemos obtenido del problema se puede enunciar en el teorema siguiente:

TEOREMA. *La función*

$$z = x + \frac{P}{x} \quad (P > 0)$$

*) Si x e y no fuesen iguales, entonces (en virtud de lo expuesto en § 14) tendría lugar la desigualdad *estricta* $x + y > 2\sqrt{P}$.

(en la que la variable independiente x adquiere solamente valores positivos) alcanza su valor mínimo $z_{\min}$ cuando $x_0 = \sqrt{P}$, y únicamente con este valor de x.

§ 16. PROBLEMA 11. *En una pared vertical está colgado el cartel AB. ¿A qué distancia de la pared debe situarse el*

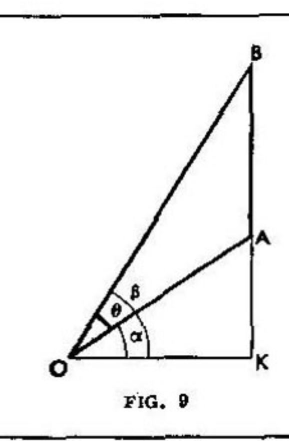


FIG. 9

observador para que el ángulo θ, bajo el cual el observador ve el cartel, sea el máximo?

SOLUCIÓN. Designemos por K el punto de intersección de la pared con la recta horizontal que pasa a través del ojo O del observador (fig. 9). Entonces OK será la distancia que buscamos. Designemos a ésta por x y supongamos que

$$KA = a, \quad KB = b.$$

Si designamos los ángulos KOA y KOB por α y β, es obvio que

$$\theta = \beta - \alpha.$$

De aquí

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Pero

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{x}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{x}.$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{b-a}{x+\frac{ab}{x}}.$$

Puesto que el valor máximo del ángulo θ se alcanzará cuando la tangente de éste sea máxima, nuestro problema se reduce a encontrar un valor de x con el cual el quebrado

$$\frac{b-a}{x+\frac{ab}{x}}$$

sea el mayor. Pero su numerador es constante. Quiere decir que debe hacerse mínimo su denominador

$$x+\frac{ab}{x}.$$

Según el teorema del párrafo anterior, el valor de x que buscamos es

$$x_0=\sqrt{ab}.$$

§ 17. El teorema del § 14 admite una generalización considerable que representa un gran interés teórico. Con su ayuda lograremos resolver una serie de problemas de máximo y mínimo. Esta generalización puede ser enunciada en forma del teorema siguiente:

TEOREMA. *La media geométrica de cualquier cantidad de números positivos no es mayor que la media aritmética de éstos*

$$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}. \qquad (3)$$

El signo de igualdad tiene lugar cuando, y solamente cuando todos los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *son iguales entre sí*

$$x_1=x_2=\ldots=x_n.$$

DEMOSTRACIÓN. Citemos una demostración*) original, aunque no muy simple, de este teorema, que representa en sí una variante muy singular de la inducción matemática.

*) Esta demostración pertenece al célebre matemático francésA. L. Cauchy, (1789—1857).

Si $n = 2$, resulta que el teorema que nos interesa coincide con el teorema ya demostrado en el § 14. Supongamos que $n = 4$. Entonces, según lo demostrado

$$\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} = \sqrt{\sqrt{x_1x_2}\cdot\sqrt{x_3x_4}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_3+x_4}{2}} \leqslant \frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2},$$

es decir,

$$\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} \leqslant \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}.$$

De tal manera, la desigualdad ha sido demostrada para $n = 4$.

Supongamos ahora que $n = 8$. Entonces, según lo demostrado,

$$\sqrt[8]{x_1x_2\ldots x_8} = \sqrt{\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}\cdot\sqrt[4]{x_5x_6x_7x_8}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\cdot\frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4}}$$

y, por consiguiente,

$$\sqrt[8]{x_1x_2\ldots x_8} \leqslant \frac{\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}+\frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4}}{2},$$

con lo que queda demostrada la desigualdad (3) para $n = 8$.

De manera análoga demostraremos la desigualdad para $n = 16$, $n = 32$, $n = 64$ y, en general, para $n = 2^m$. Esto se efectúa mediante la inducción ordinaria por m.

Efectuemos dicha inducción detalladamente. Supongamos que para cierto m ya se ha demostrado que

$$\sqrt[2^m]{x_1x_2\ldots x_{2^m}} \leqslant \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^m}}{2^m}, \qquad (4)$$

y que examinamos un sistema de 2^{m+1} números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_{2^{m+1}}$.

Está claro que

$$\sqrt[2^{m+1}]{x_1\ldots x_{2^{m+1}}} =$$

$$= \sqrt{\sqrt[2^m]{x_1\ldots x_{2^m}}\cdot\sqrt[2^m]{x_{2^m+1}\ldots x_{2^{m+1}}}}.$$

Utilizando la desigualdad (4) y la desigualdad análoga

$$\sqrt[2^m]{x_{2^m+1}\dots x_{2^{m+1}}} \leqslant \frac{x_{2^m+1}+\dots+x_{2^{m+1}}}{2^m}$$

obtenemos

$$\sqrt[2^{m+1}]{x_1\dots x_{2^{m+1}}} \leqslant \sqrt{\frac{x_1+\dots+x_{2^m}}{2^m}\cdot\frac{x_{2^m+1}\cdots x_{2^{m+1}}}{2^m}}$$

y, según el teorema del § 14, hallamos

$$\sqrt{\frac{x_1+\dots+x_{2^m}}{2^m}\cdot\frac{x_{2^m+1}+\dots+x_{2^{m+1}}}{2^m}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\frac{x_1+\dots+x_{2^m}}{2^m}+\frac{x_{2^m+1}+\dots+x_{2^{m+1}}}{2^m}}{2},$$

de donde resulta que

$$\sqrt[2^{m+1}]{x_1\dots x_{2^{m+1}}} \leqslant \frac{x_1+\dots+x_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}.$$

Así pues, ha sido demostrada la desigualdad (4) para todos los m enteros positivos.

Supongamos ahora que n no es un número del tipo 2^m. Entonces elegiremos un m lo suficientemente grande que resulte

$$2^m > n.$$

Admitamos que

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}=A$$

y agreguemos a nuestros números $x_1, x_2, \dots, x_n$, los números $2^m - n$

$$x_{n+1}=A, \quad x_{n+2}=A, \dots, \quad x_{2^m}=A.$$

En este caso, de acuerdo a lo demostrado

$$\sqrt[2^m]{x_1\dots x_n x_{n+1}\dots x_{2^m}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{x_1+\dots+x_n+x_{n+1}+\dots+x_{2^m}}{2^m},$$

De aquí

$$\sqrt[2^m]{x_1\dots x_n A^{2^m-n}} \leqslant \frac{x_1+\dots+x_n+(2^m-n)A}{2^m}.$$

Pero, puesto que

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = nA,$$

resulta que

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n+(2^m-n)A}{2^m} = \frac{nA+(2^m-n)A}{2^m} = A.$$

Por consiguiente, la desigualdad anterior toma la forma

$$\sqrt[2^m]{x_1x_2\ldots x_nA^{2^m-n}} \leqslant A,$$

de donde, después de elevarla a la potencia 2^m,

$$x_1x_2\ldots x_nA^{2^m-n} \leqslant A^{2^m},$$

y, por lo tanto,

$$x_1x_2\ldots x_n \leqslant A^n,$$

es decir,

$$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \leqslant A = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Para finalizar la demostración del teorema queda por comprobar el hecho de que en la desigualdad (3) figura el signo de igualdad cuando, y solamente cuando

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

La primera de estas afirmaciones es obvia. Efectivamente, si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a$, ambos miembros de la desigualdad (3) serán precisamente iguales a a. Demostrar la segunda afirmación es algo más difícil: si en la relación (3) figura el signo de igualdad, entonces

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

Demostraremos este hecho partiendo de la demostración a la inversa. Siendo así, supongamos que

$$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},$$

aunque no todos los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son iguales. Puesto que la numeración de éstos depende de nosotros, podemos admitir que

$$x_1 \neq x_2.$$

Examinemos otro conjunto de números

$$y_1, y_2, x_3, x_4, \ldots, x_n,$$

en el que todos los números, comenzando desde el tercero, son los mismos que en el conjunto inicial $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ y donde

$$y_1 = y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Es evidente que $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$ y, por consiguiente,

$$\frac{y_1 + y_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}.$$

Así pues, también

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \frac{y_1 + y_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}.$$

Pero, en virtud de la desigualdad (3) ya demostrada,

$$\sqrt[n]{y_1 y_2 x_3 \dots x_n} \leqslant \frac{y_1 + y_2 + x_3 + \dots + x_n}{n},$$

lo que, en unión con la igualdad anterior, nos da

$$\sqrt[n]{y_1 y_2 x_3 \dots x_n} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}$$

y, por lo mismo,

$$y_1 y_2 \leqslant x_1 x_2.$$

Esta última correlación contradice el teorema del § 14 ya que, de acuerdo con éste, el producto de dos factores *iguales* $y_1 y_2$ debe ser *estrictamente mayor* que el producto de dos factores *diferentes* cuya suma es igual ($y_1 + y_2 = x_1 + x_2$).

El teorema está demostrado totalmente.

§ 18. Del teorema demostrado se deduce la posibilidad de resolver los dos problemas que se examinan en el párrafo presente.

PROBLEMA 12. *Se requiere descomponer el número positivo A en n factores positivos de tal modo que el producto de éstos sea el máximo.*

SOLUCIÓN. Sopongamos que los números $x_1, x_2, \dots, x_n$ son positivos y que

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = A.$$

Entonces, de acuerdo con el teorema del § 17, tenemos

$$x_1 x_2 \dots x_n \leqslant \left(\frac{A}{n}\right) n.$$

Así pues, ninguna selección de los factores logra un producto *mayor* que $\left(\frac{A}{n}\right)^n$. Por otro lado, cuando $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{A}{n}$, es obvio que se obtiene un producto *igual a* $\left(\frac{A}{n}\right)^n$. Entonces, todos los factores que buscamos deben ser iguales entre sí.

Según el teorema del § 17 esta solución del problema es la *única posible*.

PROBLEMA 13. *Se requiere descomponer el número positivo P en n factores positivos de tal modo que la suma de éstos sea la mínima.*

La *solución* es análoga a la del problema 12. Precisamente, si

$$x_1 x_2 \ldots x_n = P,$$

según el teorema del § 17, resultará

$$x_1 + x_2 + \ldots x_n \geqslant n\sqrt[n]{P}.$$

Quiere decir que ninguna selección de los factores logra una suma inferior a $n\sqrt[n]{P}$, y puesto que con

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \sqrt[n]{P}$$

la suma que se obtiene es igual a $n\sqrt[n]{P}$, todos los factores que buscamos deben ser iguales entre sí.

Aquí también la solución hallada es la única posible.

§ 19. Valiéndose de los resultados del § 18 se pueden resolver también toda una serie de problemas concretos. Citaremos varios ejemplos.

Las soluciones de los problemas obtenidas a continuación y examinadas en todos estos ejemplos, son las únicas posibles. Esta circunstancia se deriva fácilmente de lo expuesto anteriormente y no volveremos a tratarla más.

PROBLEMA 14. *Inscribir en la esfera dada un cilindro de volumen máximo.*

SOLUCIÓN. Conservando las designaciones del § 11 tenemos la expresión del volumen que nos interesa en la forma de

$$V = \pi r^2 h.$$

Pero, como ya vimos en el § 11,

$$h = 2\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Entonces,

$$V = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Admitiendo que $z = \frac{1}{4\pi^2} V^2$, obtenemos:

$$z = r^4 (R^2 - r^2),$$

adquiriendo z su valor máximo con el mismo r con el que lo adquiere V. Ya que

$$\frac{1}{4} z = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{r^2}{2} (R^2 - r^2),$$

resulta que $\frac{1}{4} z$ es el producto de tres factores cuya suma es igual a R^2. Así pues, el valor máximo de z será el que corresponda a un r que cumpla la relación:

$$\frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2} = R^2 - r^2.$$

De ahí,

$$r = R\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

§ **20.** PROBLEMA 15. *Inscribir en el cono dado un cilindro de volumen máximo.*

SOLUCIÓN. Conservando las designaciones del § 12, tenemos la expresión del volumen que nos interesa en la forma de

$$V = \pi r^2 h.$$

Pero, como vimos en el § 12,

$$h = \frac{H}{R} (R - r).$$

Entonces

$$V = \pi \frac{H}{R} r^2 (R - r).$$

El valor máximo de V se obtiene con el mismo r con el que la función

$$z = \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} (R - r),$$

que es el producto de tres factores cuya suma es constante, alcanza también su valor máximo. Por lo tanto, $z_{máx}$ se logra cuando

$$\frac{r}{2}=\frac{r}{2}=R-r,$$

es decir, cuando $r=\frac{2}{3}R$.

§ 21. PROBLEMA 16. *Inscribir en la esfera dada un cono de volumen máximo.*

SOLUCIÓN. Designemos por R el radio de la esfera y por r y h, respectivamente, el radio de la base y la altura del cono.

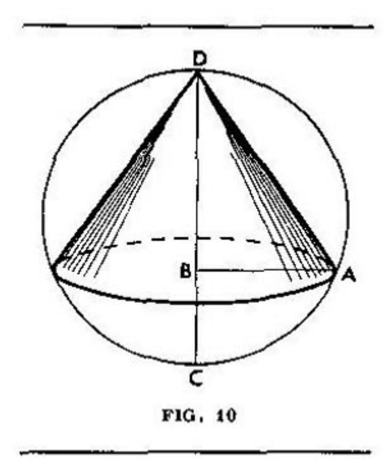


FIG. 10

De la fig. 10 es evidente que $r = AB$ es la media proporcional entre los segmentos BD y BC. Pero

$$BD = h, \quad BC = 2R - h.$$

Por lo tanto,

$$r^2 = h\,(2R - h).$$

Pero como el volumen que nos interesa es

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

entonces

$$V=\frac{\pi}{3}h^2(2R-h).$$

Introduciendo en lugar de V la función

$$z=\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}(2R-h),$$

que simultáneamente con V adquiere su valor máximo, vemos que $z_{máx}$ se alcanza cuando

$$\frac{h}{2}=\frac{h}{2}=2R-h,$$

es decir, cuando

$$h=\frac{4}{3}R.$$

§ 22. PROBLEMA 17. *Sobre el centro de una mesa redonda, una lámpara está colgada de una polea. ¿A qué altura se debe*

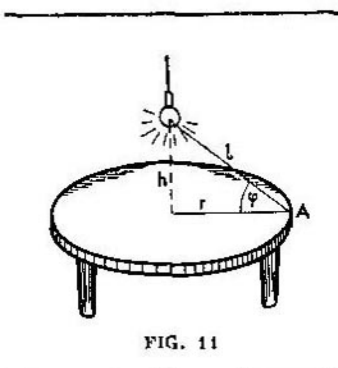


FIG. 11

situar ésta para obtener iluminación máxima en los bordes de la mesa?

SOLUCIÓN. Introducimos las designaciones de la fig. 11. Del curso de física se sabe que la intensidad luminosa I en el punto A se expresa por la fórmula

$$I=k\frac{\operatorname{sen}\varphi}{l^2},$$

donde k es un coeficiente constante de proporcionalidad.

Señalando que el

$$\cos\varphi = \frac{r}{l},$$

obtenemos

$$I = \frac{k}{r^2}\operatorname{sen}\varphi\cdot\cos^2\varphi.$$

Examinemos en lugar de I la magnitud

$$z = \frac{r^4}{k^2} I^2.$$

Es obvio que $z_{máx}$ e $I_{máx}$ se obtienen simultáneamente. Pero como

$$z = \operatorname{sen}^2\varphi\cdot\cos^4\varphi,$$

resulta que

$$\frac{1}{4} z = (1 - \cos^2\varphi)\frac{\cos^2\varphi}{2}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{2},$$

y el valor máximo de z se alcanza si

$$1 - \cos^2\varphi = \frac{\cos^2\varphi}{2} = \frac{\cos^2\varphi}{2},$$

es decir, cuando el

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Para este φ

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

y, puesto que

$$h = r\operatorname{tg}\varphi,$$

la altura que buscamos es

$$h_0 = r\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7r.$$

§ 23. PROBLEMA 18. *Se tiene una chapa rectangular de hojalata con dimensiones de 80 cm × 50 cm. Se quiere recortar en todos los ángulos de la chapa cuadraditos iguales de modo que después de doblar los bordes que quedaron, se obtenga una caja abierta de capacidad máxima.*

SOLUCIÓN. Designemos por x el lado del cuadradito que cortamos (fig. 12). No es difícil ver que el volumen V de la caja que obtenemos será

$$V = x(80 - 2x)(50 - 2x).$$

Es evidente que el intento de hallar $V_{\text{máx}}$ sustituyendo V por $z = 4x(80 - 2x)(50 - 2x)$, con la sucesiva igualación entre sí de los tres factores, no será exitoso, ya que la ecuación

$$80 - 2x = 50 - 2x$$

es insoluble.

Procederemos de otra manera, introduciendo en el último factor cierto multiplicador constante k cuya elección precisaremos más tarde. Así, en lugar de V vamos a examinar la magnitud

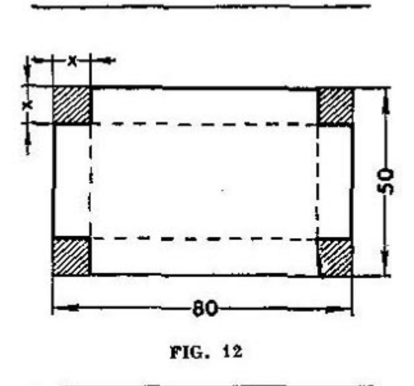


FIG. 12

$$kV = x(80 - 2x)(50k - 2kx).$$

Aquí la suma de los factores no será una magnitud constante y, por eso, complementariamente, multiplicaremos el primer factor por $(2k + 2)$. Entonces, en lugar de V, anali-

zaremos la función

$$z = [(2k + 2)\,x]\,[80 - 2x]\,[50k - 2kx].$$

En este caso, cualquiera que sea la elección de k, la suma de los factores será constante e igual a $80 + 50k$. Por consiguiente, la función z (y con ella también V) dquirirá su valor máximo cuando

$$(2k + 2)\,x = 80 - 2x = 50k - 2kx.$$

De tal forma, para hallar x, tenemos dos ecuaciones:

$$(2k + 2)\,x = 80 - 2x,$$
$$(2k + 2)\,x = 50k - 2kx.$$

Estas ecuaciones tinen las soluciones siguientes:

$$x = \frac{40}{k+2}, \qquad x = \frac{25k}{2k+1}.$$

Para que el problema sea soluble, estos valores de x deben coincidir, es decir, debe cumplirse que

$$\frac{40}{k+2} = \frac{25k}{2k+1}. \qquad (5)$$

En este caso nos ayuda la circunstancia de poder elegir libremente el número k. Escogeremos k de modo que se cumpla la condición (5). Para ello es necesario considerar (5) como una ecuación que determina k. Al resolver esta ecuación hallamos dos valores para k:

$$k_1 = 2, \quad k_2 = -\frac{4}{5}.$$

Mas para k son inadmisibles valores negativos. Efectivamente, por el sentido del problema, el factor $50-2x$, que entra en la composición de V, debe ser *positivo*. Por otra parte, para que al hallar $z_{máx}$ sea posible utilizar el «procedimiento de igualación de los factores», hay que estar seguro de que todos los factores son positivos. En particular, debe ser positivo el factor

$$50k - 2kx = k\,(50 - 2x).$$

Empero las expresiones

$$k\,(50 - 2x) \quad \text{y} \quad (50 - 2x)$$

pueden ser simultáneamente positivas sólo si k es positivo.
De esta manera, para k se debe elegir el valor

$$k = 2.$$

Con esta elección de k el valor de x es

$$x = 10.$$

Esta es la solución del problema.

CONCLUSION

Como hemos visto, con el auxilio de procedimientos algebraicos elementales, se puede resolver cualquier problema encaminado a calcular los valores extremos del trinomio cuadrático

$$y = ax^2 + bx + c.$$

En los casos en los que el problema se reduce al cálculo de los valores máximo o mínimo de una función de carácter más complicado, únicamente logramos la solución total con la ayuda de procedimientos artificiales elegidos para cada problema particular.

Es lógico preguntar si, en general, existen *procedimientos universales* para hallar los valores extremos de funciones de cualquier índole, que no sean trinomios cuadráticos. Semejantes procedimientos existen pero, como ya se dijo en la «Introducción», para su estudio se requiere el conocimiento de las matemáticas superiores.

SUMA DE CANTIDADES INFINITAMENTE PEQUEÑAS

PREFACIO

El estudio del cálculo integral es bastante difícil, ya que en su forma actual este cálculo es el resultado del entrelazamiento mutuo de una gran cantidad de ideas muy diversas.

Sin embargo, el concepto fundamental del cálculo integral (que de hecho remonta a la antigüedad), es decir, el concepto del límite de la suma de un número ilimitadamente creciente de sumandos que decrecen ilimitadamente, es muy simple y natural.

La asimilación de este concepto no exige gran preparación y, a su vez, es muy útil, ya que crea la posibilidad de resolver una serie de problemas importantes de la geometría y de la física, permite asimilar más profundamente la idea del límite y sirve de magnífica introducción al estudio sistemático de la matemática superior.

En el presente libro se explica en qué consiste el concepto mencionado y cómo se utiliza este último para resolver diversos problemas concretos. El material comprendido en este libro representa en sí las conferencias, ampliadas y perfeccionadas, que reiteradamente ofrecí a los escolares leningradenses de los novenos y décimos grados.

El Autor

§ 1. ALGUNAS FORMULAS DEL ALGEBRA

1. En la exposición ulterior necesitaremos ciertas fórmulas que, aunque están relacionadas con el curso de álgebra, no siempre se explican en la escuela. Estas fórmulas dan la expresión de las sumas de tipo

$$S_p = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p,$$

donde p significa un número entero positivo. A nosotros nos será necesaria la expresión de las sumas S_p solamente para valores pequeños de p:

$$p = 1, 2, 3.$$

Deduciremos las expresiones indicadas.

2. Suma de los términos de la serie natural. Hallemos ante todo la suma

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

Esta es la suma de n términos de la progresión aritmética cuyo primer término $a_1 = 1$ y su diferencia $d = 1$; por esto, su magnitud puede ser determinada con ayuda de la conocida fórmula del álgebra:

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

Mostraremos otro procedimiento de determinación de la fórmula (1) que, aunque es algo más complicado, es en cambio aplicable con éxito al hallar cualquier suma S_p.

Tomemos la conocida igualdad

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

y sustituyamos sucesivamente en ella n por $n-1$, después por $n-2$, y así hasta que no lleguemos a la unidad. Como resultado obtendremos una serie de igualdades:

$$\left.\begin{aligned} (n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ n^2 &= (n-1)^2 + 2(n-1) + 1 \\ (n-1)^2 &= (n-2)^2 + 2(n-2) + 1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2^2 &= 1^2 + 2\cdot 1 + 1 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Sumemos todas estas igualdades. Con esto prestaremos atención al hecho de que la columna de los términos del pri-

mer miembro estará compuesta casi de los mismos términos que la columna de los *primeros* términos del segundo miembro. La diferencia entre estas columnas consiste en que en el primer miembro falta el término 1^2, que es el último en la columna del segundo miembro, y figura $(n+1)^2$, que no existe en el segundo miembro.

En virtud de esta observación se ve que, después de eliminar los términos iguales, en ambas columnas obtenemos:

$$(n+1)^2 = 1^2 + \{2n + 2(n-1) + \ldots + 2\cdot 1\} + \\ + \{1 + 1 + \ldots + 1\}.$$

El número de términos en las *segundas* llaves es igual al número de filas en las igualdades (2), es decir, es igual a n, así es que toda esta llave es igual a n. Señalaremos a continuación que si sacamos fuera de las *primeras* llaves el factor común 2 resultará ser que entre éstas queda precisamente la suma S_1. Si sustituimos 1^2 por 1 hallaremos que

$$(n+1)^2 = 1 + 2S_1 + n.$$

De aquí sigue que

$$2S_1 = (n+1)^2 - (n+1) = (n+1)[(n+1) - 1] = \\ = n(n+1)$$

y, definitivamente,

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2},$$

así es que de nuevo obtenemos la fórmula (1).

3. Suma de cuadrados. Apliquemos el procedimiento que acabamos de indicar para hallar la magnitud de la suma de los *cuadrados* de los primeros n números enteros positivos, es decir, la suma

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

Para ello, en la igualdad

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

sustituiremos sucesivamente n por $n-1$, por $n-2$, etc, hasta que no lleguemos a la unidad. Esto nos conducirá a

una serie de igualdades:

$$\left.\begin{aligned}(n+1)^3 &= n^3+3n^2+3n+1\\ n^3 &= (n-1)^3+3(n-1)^2+3(n-1)+1\\ (n-1)^3 &= (n-2)^3+3(n-2)^2+3(n-2)+1\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ 2^3 &= 1^3+3\cdot 1^2+3\cdot 1+1\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Sumemos todas estas igualdades. Como en el caso anterior, también podemos realizar simplificaciones considerables; precisamente, de la columna de los términos del primer miembro desaparecerán todos los términos excepto el primero, es decir, excepto $(n+1)^3$, y de la columna de los *primeros* términos del segundo miembro desaparecerán todos los términos excepto el último, es decir, excepto 1^3.

Después, si sacamos el factor común 3 de la columna de los *segundos* términos del segundo miembro es evidente que precisamente quedará la suma S_2, que es menester hallar. De manera análoga la columna de los terceros términos del segundo miembro nos da la suma triple S_1, que ya hallamos más arriba. Si advertimos, además, que el número de filas en (3) es igual a n, hallaremos

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3S_2 + 3S_1 + n.$$

Sustituyendo ahora 1^3 por 1 y S_1 por su expresión (1) obtendremos

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n.$$

De aquí

$$3S_2 = (n+1)^3 - \frac{3}{2}\,n\,(n+1) - (n+1),$$

ó

$$3S_2 = (n+1)\left[(n+1)^2 - \frac{3}{2}\,n - 1\right] = n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Así pues,

$$3S_2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{2}.$$

Definitivamente tenemos:

$$S_2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}. \qquad (4)$$

4. Suma de cubos. Absolutamente del mismo modo, partiendo de la igualdad

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1,$$

llegaremos al sistema de igualdades:

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1,$$
$$n^4 = (n-1)^4 + 4(d-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$2^4 = 1^4 + 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1.$$

Después de sumar y efectuar las simplificaciones adecuadas hallaremos:

$$(n+1)^4 = 1 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n.$$

Sustituyendo las sumas S_1 y S_2 por sus expresiones (1) y (4) ya halladas y efectuando todos los cálculos que, sin duda, se pueden consentir al lector, obtendremos también una expresión para la suma S_3:

$$S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \qquad (5)$$

De manera análoga se pueden hallar las sumas S_4, S_5, etc.

5. Aunque esto no tiene relación directa con el tema de este libro, no podemos pasar sin referirse a un corolario muy curioso de las fórmulas (1) y (5). Exactamente, de la comparación de estas fórmulas se ve que

$$S_3 = S_1^2,$$

o, más detalladamente,

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2. \qquad (6)$$

Por ejemplo,

$$1^3 + 2^3 = 9 \quad \text{y} \quad (1+2)^2 = 9,$$

ó

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \quad \text{y} \quad (1+2+3)^2 = 36,$$

ó

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 \quad \text{y} \quad (1+2+3+4)^2 = 100.$$

La igualdad (6) es aún más interesante ya que para valores arbitrarios de los números $a, b, \dots, k$, como es fácil con-

vencerse, no existe en absoluto una igualdad más general que

$$a^3 + b^3 + \ldots + k^3 = (a + b + \ldots + k)^2.$$

6. El símbolo $\sum$. Las fórmulas (1), (4) y (5) también se pueden escribir de otra forma si se hace uso del símbolo $\sum$, muy difundido en las matemáticas. Justamente, si tenemos una serie de términos designados por una misma letra, por ejemplo a, pero marcados con signos en esta letra para poder diferenciarlos entre sí: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, entonces la suma de estos términos se designa con el símbolo

$$\sum_{h=1}^{n} a_h, \tag{7}$$

donde a_h significa que el término *típico* de esta suma es a con cierto signo, y por encima y por debajo del símbolo de sumar $\sum$ se indica que el signo en la letra a recorre todos los valores enteros desde 1 hasta n. El mismo símbolo $\sum$ es la letra mayúscula griega *sigma*.

Con ayuda del símbolo $\sum$ las sumas S_1, S_2, S_3 pueden ser expresadas así:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k, \quad S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad S_3 = \sum_{h=1}^{n} k^3,$$

y las fórmulas (1), (4) y (5) adquieren el aspecto[1]:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}} \tag{8}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}, \tag{9}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}. \tag{10}$$

[1] Nosotros consideramos que el lector estudia este libro «con el lápiz en la mano». Si no fuera así recomendamos escribir las fórmulas (8), (9) y (10) en una hoja de papel y tenerlas a la vista en lo sucesivo.

7. Algunas propiedades del símbolo $\sum$. Señalaremos además algunas propiedades del símbolo de sumar $\sum$.

1) Si cada uno de los términos es de por sí la suma de dos otros términos su suma también se descompone en dos sumas. Exactamente:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k. \quad (11)$$

Para la demostración de la igualdad (11) es suficiente escribir su primer miembro en forma desarrollada:

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n),$$

que, evidentemente, se puede volver a escribir así:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n),$$

y esto es precisamente el segundo miembro de la igualdad (11).

2) Si todos los términos de la suma tienen un factor común éste se puede extraer fuera del símbolo de la suma:

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k. \quad (12)$$

3) Si todos los términos a_k son iguales a una misma magnitud a, entonces su suma es igual a esta misma magnitud multiplicada por el número de términos,

$$\sum_{k=1}^{n} a = na. \quad (13)$$

Esta propiedad también puede ser fácilmente demostrada por el lector. En vista de la extraordinaria simplicidad de las propiedades señaladas del símbolo $\sum$ en lo sucesivo haremos uso de él sin mencionar esto especialmente.

§ 2. CALCULO DE LA PRESION DE UN LIQUIDO SOBRE UNA PARED VERTICAL

8. Presión sobre la pared de un recipiente. Supongamos que ante nosotros se encuentra un recipiente rectangular lleno de agua; sus dimensiones se indican en la fig. 1. Planteemos el problema de hallar la presión[1] P del agua sobre la pared delantera del recipiente.

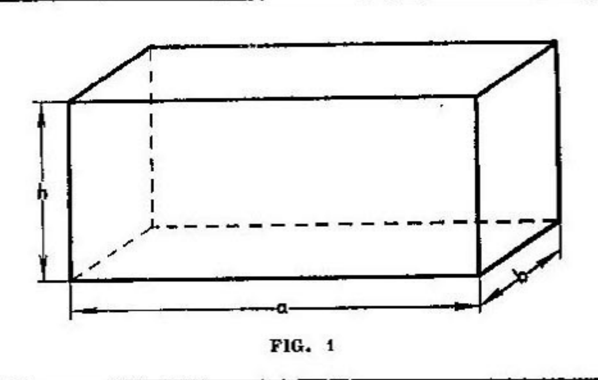


FIG. 1

Para resolver este problema se deben recordar algunas leyes de la hidrostática.

9. Si cierta superficie *horizontal* se encuentra debajo del agua, resulta ser que la presión de ésta sobre la superficie es igual al peso de la columna de agua que se apoya en ella, es decir, de la columna cilíndrica que tiene por base dicha superficie y por altura, la profundidad a la que ésta se encuentra sumergida. Puesto que se trata del agua, cuyo peso específico es igual a la unidad, el peso de la columna men-

[1] Aquí y en lo sucesivo, al hablar de «presión», se tiene en cuenta toda la fuerza con la que el agua presiona sobre la pared, y no la fuerza calculada para una unidad de superficie (es decir, no la presión específica).

cionada es igual al volumen de ésta, es decir, es igual al área de la superficie multiplicada por la profundidad de sumersión. De tal guisa, este producto da precisamente la magnitud de la presión sobre la superficie horizontal.

Si la superficie que se encuentra debajo del agua no es horizontal, entonces sus diversos puntos se encuentran a diferente profundidad, y no se puede hablar respecto a la profundidad de sumersión. Pero, si esta superficie es *muy pequeña* entonces, con *aproximación*, se puede considerar que todos sus puntos están sumergidos a una misma profundidad, y denominar a ésta profundidad de sumersión de la propia superficie.

Supongamos que tenemos semejante superficie muy pequeña sumergida en el agua; calculemos la presión sobre ella. Con este fin vamos a imaginar que giramos la superficie alrededor de uno de sus puntos de tal manera que tome posición horizontal. Puesto que en el interior del líquido la presión se transmite en cada punto de éste igualmente en todas direcciones, y puesto que las dimensiones de la superficie son muy pequeñas, la operación del giro que señalamos apenas hace variar la presión sobre la superficie. Simultáneamente, ya es aplicable a la superficie, en su nueva posición *horizontal*, la ley de cálculo de la presión que anteriormente indicamos. Como el proceso de giro de la superficie no varía ni el área de ésta, ni su profundidad de sumersión (lo último porque la superficie es muy pequeña), podemos enunciar semejante afirmación: *la presión sobre una superficie pequeña que se encuentra sumergida en el agua es igual al área de esta superficie multiplicada por la profundidad de su sumersión.*

Esta regla no es del todo exacta, sino aproximada, y proporciona un resultado tanto más exacto cuanto menor es la superficie que examinamos.

10. Una vez establecida esta ley volveremos al problema planteado más arriba. La pared delantera del recipiente no es muy pequeña y, por consiguiente, directamente, la ley establecida es inaplicable a ella. Para que, a pesar de esto, se pueda aplicar esta ley procederemos de la manera siguiente.

Tomemos un número muy grande n y dividamos la pared en n bandas iguales horizontales (fig. 2), la anchura de cada cual es $\frac{1}{n}h$.

Examinemos ahora una de estas bandas «elementales», por ejemplo, la k-a de arriba. Esta es muy estrecha y podemos considerar que todos sus puntos yacen a una misma profundidad. Entonces[1] la presión sobre ella se calcula con ayuda de la ley de p. 9.

El área de la superficie es igual al producto de su longitud a por la anchura $\frac{1}{n}h$, es decir, es igual a $\frac{1}{n}ah$. Para

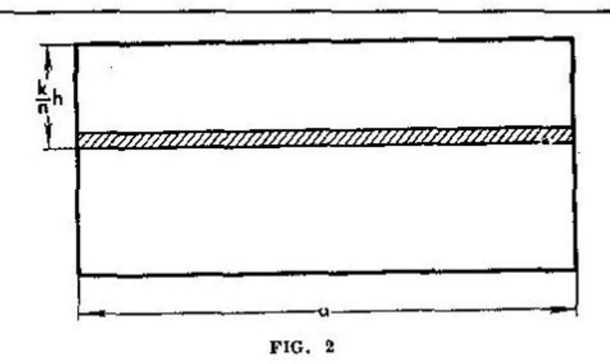


FIG. 2

obtener la presión es menester multiplicar este número por la profundidad de sumersión de la banda. Para la k-a banda de arriba esta profundidad es igual a $\frac{k}{n}h$[2]. De tal guisa, la presión P_k sobre la k-a banda (presión «elemental») es igual a

$$P_h = \frac{ah^2}{n^2}k.$$

[1] Examinando la deducción de la ley de la presión vemos que para su justeza se requiere solamente que todos los puntos de la superficie se encuentren (aunque sea aproximadamente) a una misma profundidad. Por esto la ley es aplicable a una banda estrecha horizontal, aunque, debido a su longitud, no se puede considerar que ésta es «pequeña».

[1] La magnitud $\frac{k}{n}h$ es la profundidad del *borde inferior* de la k-a banda, pero, puesto que desatendemos de la diferencia existente entre la profundidad de los diferentes puntos de la banda, admitimos que esta magnitud es la profundidad de sumersión de toda la banda. En lo sucesivo tendremos que ver reiteradas veces con situaciones semejantes.

Para calcular la presión P sobre *toda* la pared es necesario sumar las presiones sobre las bandas aisladas, lo que da

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{ah^2}{n^2} k, \quad ó \quad P = \frac{ah^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k.$$

Empleando la fórmula (8) podemos representar a la presión P así:

$$P = \frac{ah^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2},$$

o también así:

$$P = \frac{ah^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

de donde, en resumen,

$$P = \frac{ah^2}{2} + \frac{ah^2}{2} \cdot \frac{1}{n}. \tag{14}$$

Sin embargo, la expresión de la presión que acabamos de hallar no es absolutamente exacta. Es que en realidad, aunque las bandas son muy estrechas, incluso en los límites de una banda los diversos puntos yacen de todas maneras a diversas profundidades. No obstante cuanto más estrechas sean las bandas que tomamos tanto más exacta será la expresión.

Así es que si aumentamos cada vez más y más el número n obtendremos de la (14) expresiones para la presión P que serán más y más exactas. De tal guisa, el valor real, exacto, de la presión es el *límite*[1]), hacia el que se aproxima la magnitud

$$\frac{ah^2}{2} + \frac{ah^2}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

cuando n crece ilimitadamente. Pero, como se ve claramente, con el aumento de n el número $\frac{1}{n}$, y conjuntamente con él también $\frac{ah^2}{2} \cdot \frac{1}{n}$, se hace cada vez menor y menor, aproxi-

[1]) Recordaremos que se denomina límite de la magnitud variable x_n al número constante l que tiene la propiedad de que la magnitud absoluta de la diferencia $x_n - l$, para todos los valores suficientemente grandes de n, resulta ser menor que cualquier número positivo dado con anterioridad.

mándose a cero. Por esto, el *límite* de la magnitud $\frac{ah^2}{2}+$ $+\frac{ah^2}{2}\times\frac{1}{n}$ es el primero de sus términos $\frac{ah^2}{2}$, que precisamente nos da la expresión absolutamente exacta de la presión

$$P=\frac{ah^2}{2}.$$

De esta forma el problema queda resuelto.

11. Presión sobre una compuerta triangular. Planteemos ahora otro problema de este mismo género.

Por ejemplo, tratemos de calcular la presión del agua sobre una compuerta triangular bajada en ésta verticalmente

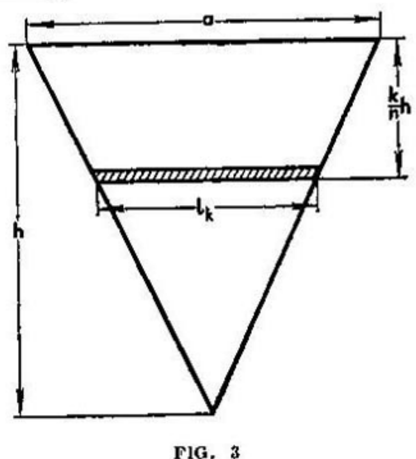


FIG. 3

de tal manera que la base del triángulo se encuentra al nivel de la superficie libre del líquido (fig. 3).

Para resolver este problema, partiendo de los razonamientos formulados detalladamente en el punto anterior, aquí también dividiremos la compuerta en n bandas horizontales muy estrechas (bandas «elementales») de $\frac{1}{n}h$ de ancho de cada una y calcularemos la presión total como la suma de las presiones sobre cada banda.

Tomemos una banda aislada, la k-a de arriba, y calculemos la presión sobre ella. Despreciando el ancho de la banda podemos considerar que todos sus puntos se encuentran a una misma profundidad igual a $\frac{k}{n}h$. La presión «elemental», es decir, la presión P_k sobre la banda con número k, se obtendrá multiplicando esta profundidad por el área de la banda. Este área puede ser calculada como el área de un trapecio. Pero, evidentemente para una banda estrecha, se puede considerar con alto grado de exactitud que su forma es *rectangular*. Esto simplifica el cálculo del área. Es cierto que aquí tiene lugar cierto error, pero éste es tanto menos perceptible cuanto más estrecha es la banda, y nosotros ya sabemos por el ejemplo anterior que de todas maneras tenemos que disminuir ilimitadamente el ancho de las bandas, así que el error indicado no influirá sobre el resultado definitivo. Aquí chocamos con una idea de carácter muy general que regularmente se utiliza al resolver problemas muy diversos: *al calcular un término elemental prestar mayor atención a la simplicidad de su expresión desatendiendo de las partes de este término para lograr dicha simplicidad, con tal de que las partes de las que desatendimos sean ínfimamente pequeñas en comparación con aquello que se tomó en consideración.* Con ayuda de la teoría de los límites se podría haber enunciado este principio de manera más exacta y estricta cosa que, sin embargo, no haremos teniendo en cuenta que la esencia del asunto se aclarará lo suficiente en los ejemplos ulteriores.

Admitiendo a la k-a banda por un rectángulo hallaremos el área de éste como el producto de su longitud por su anchura. La anchura, como es obvio, es $\frac{1}{n}h$, y la longitud l_k (el signo k indica que precisamente se trata de la k-a banda) se calcula, como se ve en la fig. 3, de la similitud de los triángulos mediante la proporción

$$l_k : a = \left(h - \frac{k}{n}h\right) : h,$$

de donde $l_k = \left(1 - \frac{k}{n}\right) a$.

De tal manera, el área de la banda es

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right) a \cdot \frac{1}{n} h,$$

y la presión sobre ella

$$P_k = \frac{ah^2}{n^2}\left(1 - \frac{k}{n}\right)k.$$

Toda la presión se hallará sumando las magnitudes calculadas

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{ah^2}{n^2}\left(1 - \frac{k}{n}\right)k, \quad \text{ó} \quad P = \frac{ah^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{ah^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Empleando las fórmulas (8) y (9) podemos dar a esta expresión la forma

$$P = \frac{ah^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{ah^2}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

o, lo que es igual

$$P = \frac{ah^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{ah^2}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Esta expresión de la presión es aproximada y su precisión es tanto mayor cuanto mayor es el número n. Por lo tanto, para hallar la magnitud exacta de la presión, es menester aumentar ilimitadamente n en el segundo miembro de esta igualdad, y hallar el *límite* de este segundo miembro. Puesto que el aumento del número n lleva tras sí la aproximación a cero del quebrado $\frac{1}{n}$ los factores $1 + \frac{1}{n}$ y $2 + \frac{1}{n}$ se aproximan correspondientemente a 1 y a 2; por esto (basándose en el teorema referente al límite del producto y de la diferencia) toda la expresión escrita más arriba tiene como límite el número $\frac{ah^2}{2} - \frac{ah^2}{6}\cdot 2$.

De tal modo,

$$P = \frac{ah^2}{2} - \frac{ah^2}{3}$$

y, definitivamente,

$$P = \frac{ah^2}{6}.$$

Esta es la magnitud *exacta* de la presión.

12. Calculemos la presión sobre una compuerta vertical de la misma forma, pero que se encuentra sumergida de tal

manera que su vértice se encuentra al nivel de la superficie del agua mientras que la base es paralela a esta última (fig. 4).

Dividiendo la compuerta en bandas horizontales de $\frac{1}{n} h$ de ancho, y admitiendo que cada una de estas bandas es un

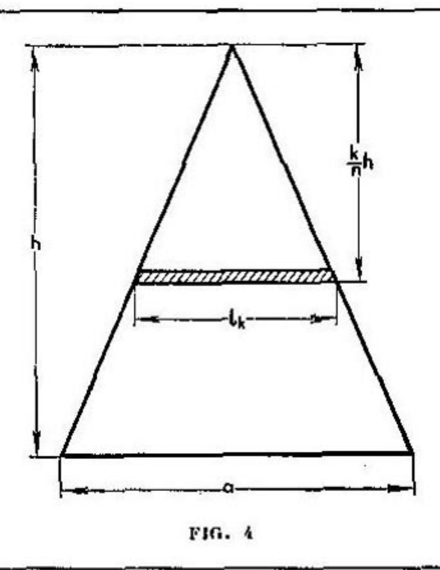


FIG. 4

rectángulo, hallaremos la longitud de la k-a banda por la similitud de los triángulos

$$l_k : a = \frac{k}{n} h : h,$$

de donde $l_k = \frac{k}{n} a$.

De aquí el área de la banda es igual a $\frac{k}{n^2} ah$ y, puesto que la profundidad de su sumersión es $\frac{k}{n} h$, la presión elemental es igual a

$$P_k = \frac{k^2}{n^3} ah^2.$$

La presión total se obtiene sumando todas las presiones elementales

$$P=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}ah^2=\frac{ah^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2.$$

Con ayuda de la fórmula (9) volveremos a escribir P así:

$$P=\frac{ah^2}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

o así:

$$P=\frac{ah^2}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

La expresión exacta se obtiene de aquí por transición al límite cuando n crece ilimitadamente; para hallar este límite se deben repetir los razonamientos expuestos al final del p. 11. No entrando ya en detalles solamente indicaremos que el límite incógnito se halla desechando en los paréntesis del término $\frac{1}{n}$, lo que definitivamente da

$$P=\frac{ah^2}{3}.$$

13. Presión sobre un semicírculo. En los ejemplos examinados, como es obvio, se desarrollaba una misma idea. Esta consistía en la división de la presión incógnita P en términos elementales P_k. El cálculo de un término se efectuaba de manera simple (despreciando la diferencia entre las profundidades de los diversos puntos de una banda, suponiendo que la banda es de forma rectangular), lo que permitió hallar P_k sin dificultad. Después de esto se sumaban todas las presiones elementales y se hallaba el límite de la suma obtenida al crecer n infinitamente. Con esto, para hallar el límite de la suma, utilizabamos las fórmulas (8) y (9) del § 1. No obstante, sería un error el pensar que la resolución de problemas con el procedimiento señalado conduce a las sumas simples del § 1; al revés, muy frecuentemente llegamos a sumas mucho más complicadas. Ilustraremos esto con un ejemplo. Exactamente, procuraremos calcular la presión sobre una compuerta semicircular (fig. 5) instalada verticalmente en el agua de tal manera que la superficie libre del líquido coincide con el diámetro del semicírculo.

Empleando los razonamientos ya expuestos dividimos la compuerta en bandas de $\frac{1}{n}R$ de anchura, donde R es el radio del semicírculo. Aquí también admitimos a cada

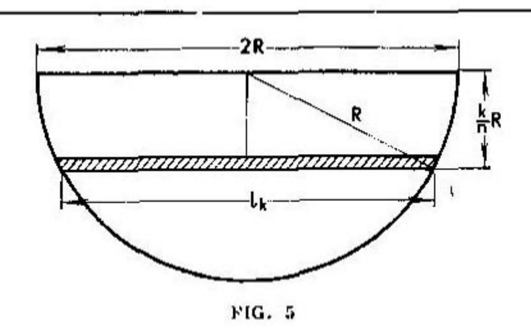


FIG. 5

una de las bandas por un rectángulo. Su longitud se calcula con ayuda del teoréma de Pitágoras:

$$l_k = 2\sqrt{R^2 - \frac{k^2}{n^2}R^2} = \frac{2R}{n}\sqrt{n^2 - k^2}.$$

En este caso el área de la banda es

$$\frac{2R^2}{n^2}\sqrt{n^2 - k^2},$$

y la presión elemental es igual a

$$P_k = \frac{2R^3}{n^3}k\sqrt{n^2 - k^2}.$$

La expresión aproximada de la presión total es la suma

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{2R^3}{n^3}k\sqrt{n^2 - k^2}, \quad \text{ó} \quad P = \frac{2R^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2 - k^2},$$

y su magnitud exacta es el *límite* de esta suma cuando n crece infinitamente. Advertiremos que, en verdad, a nosotros nos interesa no la propia suma, sino su límite.

Así pues,

$$P = 2R^3 \lim \left[\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2 - k^2} \right], \qquad (15)$$

donde el símbolo lím precisamente significa límite.

Por consiguiente, el problema quedaría totalmente resuelto si pudiésemos hallar el límite

$$\lim \left[\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2 - k^2} \right]. \qquad (16)$$

Sin embargo, nosotros no sabemos todavía cómo calcular este límite y, por lo tanto, tampoco podemos resolver el problema que planteamos. Más abajo, en el punto 23, daremos un procedimiento para calcular el límite (16) y resolveremos este problema.

§ 3. CALCULO DEL TRABAJO PARA EXTRAER UN LIQUIDO DE LOS RECIPIENTES

14. Extracción del agua de una caldera cilíndrica. En este párrafo examinaremos un tipo de problemas que están relacionados con otra rama de la física, pero cuya resolución se efectúa con ayuda del mismo método de división en un número ilimitadamente creciente de términos que decrecen infinitamente, o, como se dice, de términos *infinitamente pequeños.*

En calidad de ejemplo típico examinaremos el problema siguiente. Sea así que en la caldera cilíndrica (fig. 6) haya agua. Supongamos que la extraemos con ayuda de una bomba. Se requiere calcular el trabajo que se gasta para extraer todo el agua.

Recordemos que se denomina trabajo gastado en el movimiento de una partícula material al producto de la fuerza, aplicada a dicha partícula, por la trayectoria que ésta describe. Volviendo a nuestro problema vemos que, para extraer

una partícula de líquido de la caldera, es suficiente elevar la partícula hasta el borde de ésta, ya que después, bajo el influjo de la fuerza de la gravedad propia, la partícula se derramará de la caldera por sí misma. De tal modo, el problema se reduce a calcular el trabajo que es necesario gastar para elevar sucesivamente todas las partículas del líquido hasta el nivel de los bordes de la caldera.

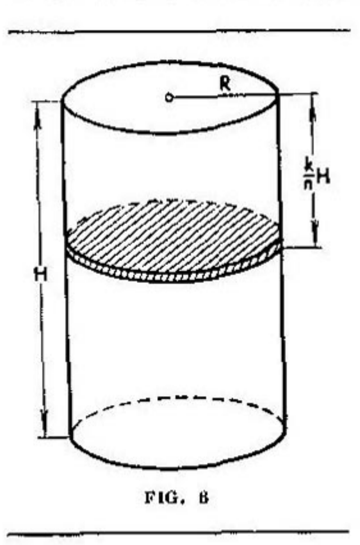


FIG. 8

Con esto, como es obvio, cada partícula describirá una trayectoria igual a la profundidad de su sumersión en la caldera. Puesto que la fuerza que se necesita superar durante la elevación es precisamente el peso de la partícula, resulta ser que el trabajo de elevación de una partícula es igual al producto del peso de la partícula por la profundidad de sumersión de ésta. Como se trata del agua, cuyo peso específico es igual a la unidad, el peso de la partícula numéricamente es igual a su volumen y, por consiguiente, *el trabajo de elevación de una partícula de agua es igual al producto del volumen de esta partícula por la profundidad de su sumersión.*

Ya que en la caldera las diversas partículas del líquido se encuentran a diferente profundidad nosotros no podemos emplear directamente el principio señalado para el cálculo del trabajo.

Pero, para tener la posibilidad de poder basarse en este principio, procederemos de manera análoga a cómo procedimos al resolver los problemas del párrafo anterior. Exactamente, dividamos la altura H del cilindro (fig. 6) en n partes de $\frac{1}{n}H$ de longitud de cada una y tracemos por los puntos de divisiones planos paralelos a las bases del cilindro. Estos planos cortarán todo el espesor del agua en n capas «elementales». Aproximadamente se puede considerar que, en los límites de una capa, todas las partículas del líquido se encuentran a una misma profundidad. Por esto, haciendo uso del principio señalado anteriormente, podemos calcular el trabajo para la elevación de una capa.

El volumen de una capa es el volumen del cilindro con radio R (donde R es el radio de la caldera) y altura $\frac{1}{n}H$, así que aquél es igual a

$$\pi R^2 \frac{H}{n}.$$

Si se trata de la k-a capa de arriba, como es obvio, la profundidad de sumersión de ésta es $\frac{k}{n}H$, y el trabajo «elemental» para su elevación es igual a

$$T_k = \pi R^2 H^2 \frac{k}{n^2},$$

El trabajo total T se halla sumando las expresiones calculadas, es decir,

$$T = \sum_{k=1}^{n} \pi R^2 H^2 \frac{k}{n^2}, \quad \text{ó} \quad T = \pi R^2 H^2 \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k.$$

Basándose en la fórmula (8) tenemos:

$$T = \pi R^2 H^2 \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2},$$

ó

$$T = \frac{\pi R^2 H^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right). \tag{17}$$

Esta igualdad, no obstante, es aproximada, ya que en realidad, incluso en los límites de una capa las profundidades de las diversas partículas no son iguales entre sí.

Sin embargo es evidente que con el crecimiento del número n mejora ilimitadamente la exactitud de esta igualdad aproximada. Por esto, la expresión *exacta* del trabajo la hallaremos calculando el *límite* del segundo miembro de la igualdad (17) cuando n crece ilimitadamente.

Este límite, como es evidente, se halla simplemente omitiendo el quebrado $\frac{1}{n}$, lo que definitivamente da

$$T = \frac{\pi R^2 H^2}{2}.$$

Si hacemos empleo de la expresión del volumen del cilindro $V = \pi R^2 H$, la magnitud hallada puede ser representada así:

$$T = V \frac{H}{2}.$$

Con otras palabras, el trabajo que nos interesa es igual a aquel trabajo que es menester gastar para elevar toda la caldera de agua a la mitad de su altura.

15. Extracción del agua de un embudo. A título de segundo ejemplo examinaremos un problema análogo de cálculo del trabajo para extraer el agua de un embudo cónico (fig. 7).

Como antes, dividiremos toda la masa de agua en n capas de $\frac{1}{n} H$ de espesor de cada una. El trabajo elemental es igual a la profundidad de la capa multiplicada por su volumen. Este volumen es el de un cono truncado. No obstante, es mucho más cómodo calcularlo admitiendo la capa por un cilindro. Esto, de antemano, no es exacto, pero introduce simplicidad en el cálculo. De manera análoga a la expuesta en el punto 11 nos convenceremos de que en el proceso de crecimiento del número n el error, que es el resultado de la admisión inexacta, desaparece, y, de esta manera, quedan sólo las ventajas de dicha admisión.

Designando por r_k el radio de la k-a capa de arriba hallaremos que su volumen es

$$\pi r_k^2 \frac{1}{n} H.$$

Puesto que la profundidad de sumersión de la capa es $\frac{k}{n} H$, el trabajo elemental será igual a

$$T_k = \pi r_k^2 H^2 \frac{k}{n^2}.$$

En esta expresión entra la magnitud r_k; expresemos a ésta por los elementos del cono. De la similitud de los triángulos tenemos

$$r_k : R = \left(H - \frac{k}{n} H\right) : H,$$

de donde

$$r_k = \left(1 - \frac{k}{n}\right) R.$$

Sustituyendo esto en la expresión del trabajo elemental hallaremos que

$$T_k = \pi R^2 H^2 \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 \frac{k}{n^2}.$$

El trabajo total que nos interesa es igual a la suma de

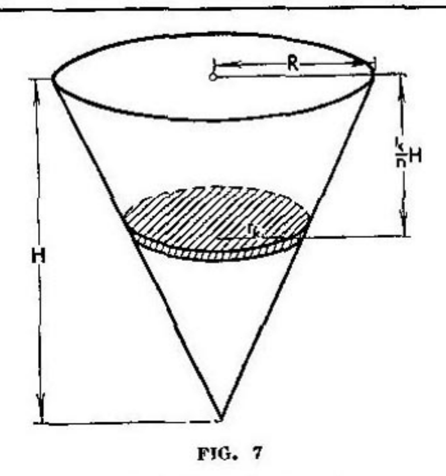


FIG. 7

los trabajos elementales hallados, es decir,

$$T = \sum_{k=1}^{n} \pi R^2 H^2 \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 \frac{k}{n^2},$$

ó

$$T = \pi R^2 H^2 \left[\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k - \frac{2}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3\right].$$

Utilizando las fórmulas (8), (9), (10) demos a la expresión hallada la forma de

$$T = \pi R^2 H^2 \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) + \\ + \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2.$$

Esta expresión solamente es aproximada, ya que las capas no son cilíndricas y las profundidades de los diversos puntos de cada capa son diferentes. No obstante, aumentando n ilimitadamente y cogiendo el *límite* del segundo miembro, hallaremos el valor exacto del trabajo

$$T = \pi R^2 H^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

y, definitivamente,

$$T = \frac{1}{12}\pi R^2 H^2.$$

Si recordamos[1] que el volumen del cono es igual a

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

entonces el trabajo calculado se puede representar en la forma de

$$T = V \cdot \frac{H}{4},$$

es decir, resulta ser que éste es igual al trabajo que se necesita para elevar todo el embudo de agua a un cuarto de su altura.

16. Extracción del agua de una semiesfera. Resolveremos un problema más de este tipo. Justamente, calcularemos el trabajo que se necesita gastar para extraer el agua de un recipiente que tiene la forma de una semiesfera (fig. 8). Procediendo como antes dividiremos toda la masa de agua en n capas horizontales de $\frac{1}{n}R$ de espesor de cada una.

Admitiendo a cada capa por un *cilindro* de radio r_k (si se trata de la k-a capa), veremos que su volumen es

$$V_k = \pi r_k^2 \frac{1}{n} R,$$

[1] Esta fórmula, entre otras cosas, se determina en el p. 18.

y, por consiguiente, el trabajo elemental es:

$$T_k = \pi r_k^2 \frac{k}{n^2} R^2.$$

Expresemos ahora el radio r_k de la k-a capa por el radio R de la esfera. Como es fácil ver en el dibujo, para este fin

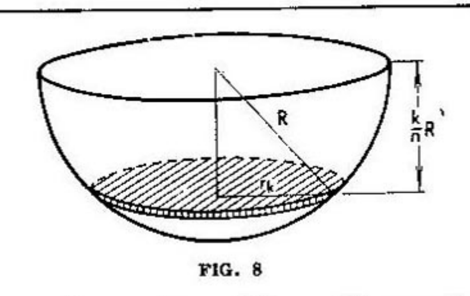


FIG. 8

se puede utilizar el teorema de Pitágoras, que nos da

$$r_k^2 = R^2 - \left(\frac{k}{n} R\right)^2.$$

De aquí

$$T_k = \pi R^4 \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) \frac{k}{n^2}.$$

El trabajo total se halla sumando todos los trabajos elementales

$$T = \sum_{k=1}^{n} \pi R^4 \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) \frac{k}{n^2},$$

ó

$$T = \pi R^4 \left[\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3\right],$$

de donde, basándose en las fórmulas del § 1, tenemos

$$T = \pi R^4 \left[\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right],$$

ó

$$T = \pi R^4 \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right].$$

Esta expresión aproximada del trabajo pasa a ser exacta si omitimos $\frac{1}{n}$, lo que da

$$T = \pi R^4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

y, definitivamente,

$$T = \frac{1}{4}\pi R^4.$$

17. Extracción del agua de una tina. Para finalizar este párrafo examinaremos el problema de cálculo del trabajo para la extracción del agua de una tina, es decir, de un recipiente que tiene la forma de un semicilindro (fig. 9).

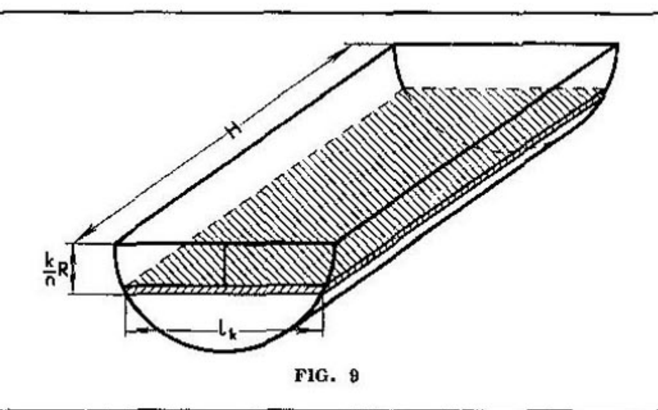


FIG. 9

Empleando el mismo método de división en términos infinitamente pequeños cortaremos toda la masa de agua en n capas estrechas y horizontales, que tienen la forma de planchas rectangulares (fig. 9). El volumen de una de estas planchas es igual a

$$V_k = Hl_k\frac{R}{n},$$

donde a través de l_k se designa su anchura. Esta anchura l_k, según el teorema de Pitágoras (como la cuerda de la circunferencia que se encuentra a la distancia $\frac{k}{n}R$ del centro), es igual a

$$l_k = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{k}{n}R\right)^2},$$

así que el volumen es igual a

$$V_k = 2R^2H\frac{1}{n^2}\sqrt{n^2-k^2}.$$

De aquí el trabajo elemental de extracción es

$$T_k = 2R^3H\frac{k}{n^3}\sqrt{n^2-k^2},$$

y el trabajo total es

$$T = \sum_{k=1}^{n} 2R^3H\frac{k}{n^3}\sqrt{n^2-k^2},$$

ó

$$T = 2R^3H\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2-k^2}. \qquad (18)$$

Sin embargo, la expresión hallada es solamente aproximada. Para hallar el valor exacto del trabajo es menester aumentar ilimitadamente n y hallar el *límite* del segundo miembro de la igualdad (18):

$$T = 2R^3H\cdot\text{lím}\left[\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2-k^2}\right]. \qquad (19)$$

De tal manera, la cuestión reside en calcular el límite

$$\text{lím}\left[\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2-k^2}\right] \qquad (20)$$

cuando crece ilimitadamente n. Recurriendo al p. 13 vemos que este límite coincide con el límite (16). Nosotros no sabemos todavía como hallar este límite y, por ello, la resolución de dos problemas físicos diferentes no puede ser finalizada. Como ya señalábamos en el p. 13, más abajo, en el p. 23, calcularemos el límite (20), y con ello resolveremos ambos problemas.

§ 4. CALCULO DE VOLUMENES

18. Volumen del cono. Los métodos desarrollados más arriba encuentran amplia aplicación al resolver una serie de problemas geométricos. En el párrafo presente mostraremos la aplicación de estos métodos para calcular el volumen de diversos cuerpos[1].

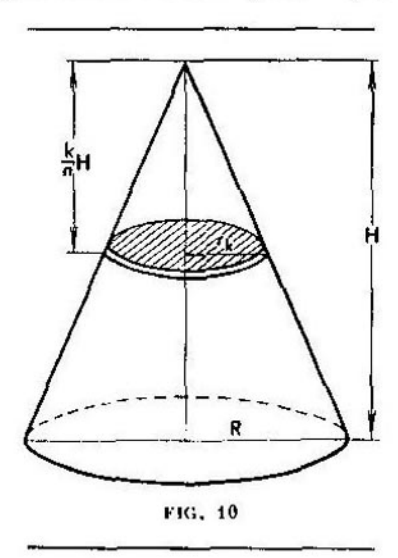


FIG. 10

Planteemos ante todo el problema de cálculo del *volumen del cono*. Para la resolución de este problema dividamos (fig. 10) la altura del cono en n partes de $\frac{1}{n}H$ de longitud de cada una y, a través de los puntos divisores, tracemos planos paralelos a la base del cono. Estos planos cortarán a todo el

[1] Puesto que a nosotros, principalmente, nos interesa puramente la cuestión referente al cálculo, aquí no pararemos en el asunto respecto a la *determinación* exacta de la noción del volumen. Como se sabe, para semejante determinación, también es necesario utilizar la noción del límite.

cono en n capas. Admitamos aproximadamente a cada una de estas capas (que, en realidad, es un cono truncado) por un cilindro. Esto, naturalmente, no es exacto, pero para valores grandes de n el error es absolutamente imperceptible.

Designando el radio del k-o cilindro elemental de arriba por r_k hallaremos que el volumen de este cilindro es igual a

$$V_k = \pi r_k^2 \frac{H}{n} \cdot$$

De la similitud de los triángulos tenemos

$$r_k : R = \frac{k}{n} H : H,$$

de donde

$$r_k = \frac{k}{n} R,$$

y la expresión del volumen elemental toma la forma:

$$V_k = \pi R^2 H \frac{k^2}{n^3},$$

así que el volumen total es igual a

$$V = \sum_{k=1}^{n} \pi R^2 H \frac{k^2}{n^3},$$

ó

$$V = \pi R^2 H \cdot \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2,$$

lo que, basándose en la fórmula (9), es igual a

$$V = \pi R^2 H \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3},$$

ó

$$V = \pi R^2 H \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}. \qquad (2)$$

Este valor del volumen no es exacto, sino solamente aproximado, puesto que, como ya se señaló, las capas aisladas no son en realidad cilindros. Sin embargo, cuanto mayor sea el número n tanto más exacta será la expresión hallada, así

que el valor real de V es el *límite* del segundo miembro de la igualdad (21) cuando n crece ilimitadamente. Este límite, como es evidente, se obtiene de (21) omitiendo el quebrado $\frac{1}{n}$, así que

$$V = \pi R^2 H \cdot \frac{1 \cdot 2}{6}$$

y, definitivamente,

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

De tal manera, *el volumen del cono es igual a un tercio del producto del área de su base por la altura.*

19. Volumen de la pirámide. Los razonamientos parecidos permiten calcular el volumen de la pirámide. Examinemos (fig. 11) una pirámide cuya altura es H y el área de

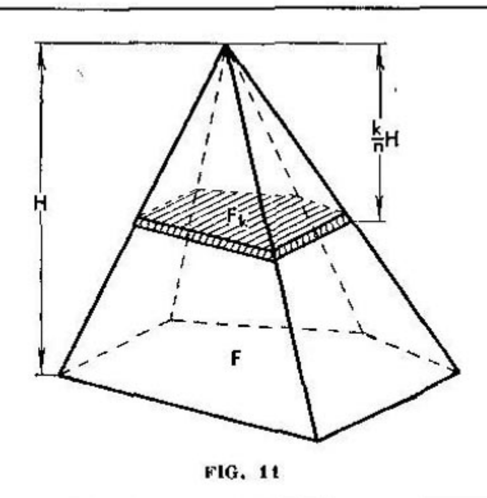


FIG. 11

su base es F. Dividiendo su altura en n partes iguales y trazando por los puntos divisores planos paralelos a la base cortaremos la pirámide en n planchas prismáticas de $\frac{1}{n} H$ de altura de cada una (hablando en rigor estas planchas no son prismáticas, sino que son pirámides truncadas, pero,

igual que antes, con aproximación, se pueden admitir como prismáticas).

Si el área de la k-a plancha de arriba es F_k no es difícil ver que tiene lugar la proporción

$$F_k : F = k^2 : n^2,$$

así que

$$F_k = \frac{k^2}{n^2} F,$$

y, por consiguiente, el volumen de una plancha es igual a

$$V_k = F_k \cdot \frac{H}{n} = \frac{k^2}{n^3} FH.$$

El volumen de toda la pirámide es igual a la suma de los volúmenes elementales:

$$V = \frac{FH}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2,$$

ó [basándose en la fórmula (9)]

$$V = \frac{FH}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Aumentando ilimitadamente n y cogiendo el límite del segundo miembro, encontraremos la igualdad exacta:

$$V = \frac{1}{3} FH,$$

así que, análogamente al volumen del cono, *el volumen de la pirámide es igual a un tercio del producto del área de su base por la altura.*

20. Volumen de la esfera. Calculemos ahora el volumen de la esfera. Es obvio que el problema quedará resuelto si nos limitamos a examinar una semiesfera y, después, duplicamos el resultado. Dividiendo la semiesfera (fig. 12) con una serie de planos en n capas de $\frac{1}{n} R$ de espesor de cada una admitiremos a cada una de ellas por un cilindro. Si el radio de la k-a capa es r_k entonces su volumen, como el volumen del cilindro, será igual a

$$V_k = \pi r_k^2 \frac{R}{n}.$$

El teorema de Pitágoras da

$$r_k^2 = R^2 - \frac{k^2}{n^2} R^2,$$

así que la expresión del volumen elemental adquiere la forma

$$V_k = \pi R^3 \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) \frac{1}{n},$$

y el volumen V^* de toda la semiesfera es la suma de todos los V_k:

$$V^* = \pi R^3 \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \right],$$

lo que, a base de las propiedades señaladas en el § 1, es igual a

$$V^* = \pi R^3 \cdot \frac{6 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6}.$$

El límite de esta expresión cuando n crece ilimitadamente

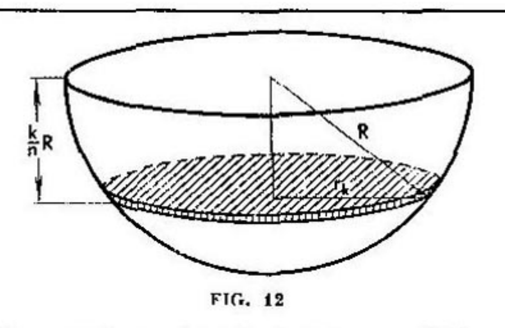


FIG. 12

da la magnitud exacta del volumen de la semiesfera

$$V^* = \frac{2}{3} \pi R^3,$$

de donde el volumen de toda la esfera es

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

21. Volumen de la parte común de dos cilindros. Ahora resolveremos un problema más difícil. Examinemos dos

cilindros de igual radio cuyos ejes se cruzan bajo un ángulo recto (fig. 13). Planteemos el problema de calcular el volumen de un cuerpo que *es parte común de ambos cilindros.* La dificultad de este problema estriba en la complejidad del

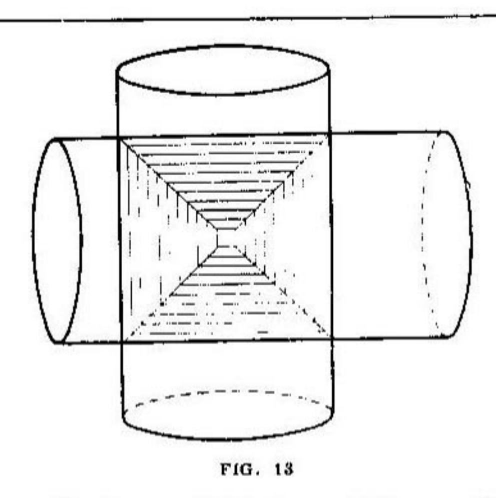


FIG. 13

cuerpo que examinamos y en lo difícil que es por esto representárselo con claridad. No obstante, este problema puede ser resuelto sin representarse todo el cuerpo.

Con este fin imaginemos un plano que pasa a través de los ejes de ambos cilindros; vamos a denominarlo plano «axial». Este plano (si consideramos que coincide con el plano del dibujo) divide el cuerpo en dos partes iguales: «delantera» y «trasera». Vamos a limitarnos a estudiar una de ellas, por ejemplo, la delantera, ya que ambas, como es obvio, son iguales.

Imaginemos ahora cualquier otro plano paralelo al axial. Dicho plano cortará a cada uno de los cilindros por una banda y, además, evidentemente, estas bandas en ambos cilindros serán de una misma anchura. Por esto, el cuerpo que examinamos, al cortarse con este plano, da un *cuadrado*.

Una vez establecido esto no es difícil resolver el problema. Exactamente, desde el punto de intersección de los ejes de ambos cilindros levantemos una perpendicular al plano

axial. La longitud del segmento de ésta comprendido en la mitad delantera del cuerpo que nos interesa, es igual a R. Dividamos a este segmento en n partes y tracemos a través de los puntos divisores planos paralelos al plano axial. Estos planos cortarán la mitad delantera del cuerpo, que exami-

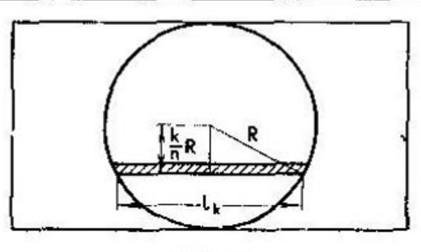


FIG. 14

namos, en n planchas cuadradas de $\frac{1}{n}R$ de espesor de cada una.

Como no es difícil ver en la fig. 14, en la que el cuerpo que examinamos se expone desde arriba, el lado del k-o cuadrado es igual a

$$l_k = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{k}{n}R\right)^2}$$

y por eso su área es

$$l_k^2 = 4R^2\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right),$$

y el volumen de la k-a plancha es

$$V_k = l_k^2 \cdot \frac{R}{n} = 4R^3\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)\frac{1}{n}.$$

El volumen V^* de toda la mitad delantera del cuerpo es la suma de todos los V_k, es decir,

$$V^* = \sum_{k=1}^{n} 4R^3\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)\frac{1}{n},$$

de donde

$$V^* = 4R^3\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\right],$$

ó

$$V^* = 4R^3\left[1 - \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right].$$

Esta igualdad aproximada pasa a ser exacta cuando n crece ilimitadamente.

De tal forma, el volumen de la mitad delantera del cuerpo es igual a

$$V^* = \frac{8}{3}R^3.$$

Todo el volumen V se halla duplicando este número, es decir,

$$V = \frac{16}{3}R^3,$$

lo que resuelve el problema. Es curioso el hecho de que, a pesar de que el carácter del cuerpo es bastante complicado, su volumen se expresó sin ninguna irracionalidad.

22. Volumen de un segmento cilíndrico. Examinemos el denominado «segmento cilíndrico», es decir, el cuerpo que se corta del cilindro por un plano que pasa a través del diámetro de la base de dicho cilindro (fig. 15). Sean (nos atenemos a las designaciones de la figura) $AB = H$, $OA = R$. Expresemos el volumen del segmento a través de H y R.

Para ello dividamos el radio OK en n partes y, a través de los puntos divisores, tracemos planos paralelos al plano del triángulo OAB. Estos planos cortarán a una de las mitades del segmento cilíndrico en n planchas triangulares de $\frac{1}{n}R$ de espesor de cada una. En la figura se expone una de estas planchas $O_1A_1B_1$. Calculemos el volumen de la k-a plancha admitiendo que es prismática.

Sea precisamente $O_1A_1B_1$ la k-a plancha, así que

$$OO_1 = \frac{k}{n}R.$$

Del teorema de Pitágoras es fácil hallar que

$$O_1A_1 = \sqrt{OA_1^2 - OO_1^2}.$$

Con otras palabras,

$$O_1A_1 = R\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}.$$

A continuación, de la similitud de los triángulos OAB y

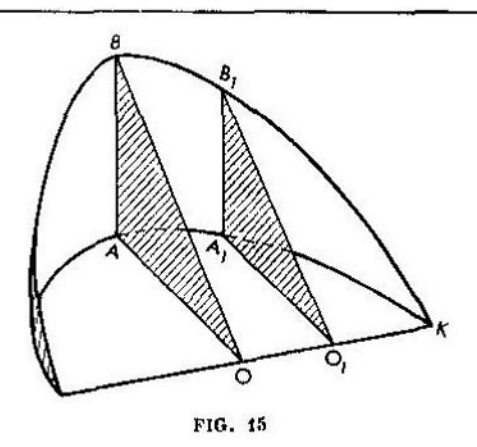


FIG. 15

$O_1A_1B_1$ tenemos:

$$A_1B_1 : AB = O_1A_1 : OA,$$

ó

$$A_1B_1 : H = R\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}} : R,$$

de donde

$$A_1B_1 = H\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}.$$

El área del triángulo $O_1A_1B_1$ es igual a $\frac{1}{2}\ O_1A_1 \cdot A_1B_1$ y, por consiguiente, es igual a

$$\frac{1}{2}RH\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right).$$

El volumen de la k-a plancha se obtiene multiplicando este área por el espesor de la plancha, es decir, por $\frac{1}{n}R$.

Quiere decir que el volumen elemental es

$$V_k = \frac{1}{2} R^2 H \left(\frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^3} \right),$$

y el volumen V^* de toda la mitad del segmento:

$$V^* = \frac{1}{2} R^2 H \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} \right],$$

o también

$$V^* = \frac{1}{2} R^2 H \left[1 - \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6} \right].$$

El límite de esta expresión da la magnitud exacta del volumen de la mitad del segmento

$$V^* = \frac{1}{3} R^2 H,$$

de donde el volumen de todo el segmento es

$$V = \frac{2}{3} R^2 H. \tag{22}$$

23. Otro procedimiento de resolución. Trataremos de resolver este mismo problema mediante otro procedimiento.

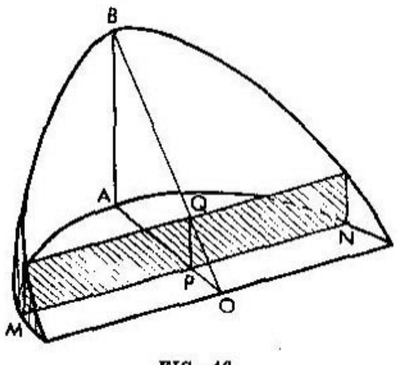


FIG. 16

Exactamente, dividamos el radio OA en n partes (fig. 16) y tracemos a través de los puntos divisores planos perpen-

diculares a este radio. Dichos planos cortarán a todo el segmento cilíndrico en n planchas rectangulares semejantes a la sombreada en la figura.

Examinemos cuál es el volumen de la k-a plancha (admitimos que éstas son prismáticas). El espesor de cada una de ellas es igual a $\frac{1}{n}R$, así es que el problema reside en hallar el área de una plancha aislada.

Considerando que la banda sombreada es precisamente la k-a, tendremos

$$OP=\frac{k}{n}R.$$

En este caso, según el teorema de Pitágoras, la cuerda MN es igual a

$$MN=2\sqrt{R^2-\frac{k^2}{n^2}R^2}.$$

De la similitud de los triángulos OPQ y OAB tenemos

$$PQ:OP=AB:OA,$$

ó

$$PQ:\frac{k}{n}R=H:R,$$

así que

$$PQ=\frac{k}{n}H,$$

y el área del rectángulo, que es igual a $PQ\cdot MN$, tiene la forma de

$$2RH\frac{k}{n}\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}.$$

Así pues, el volumen elemental es igual a

$$V_k=2R^2H\cdot\frac{k}{n^3}\sqrt{n^2-k^2}.$$

De aquí que todo el volumen es igual a la suma

$$V=2R^2H\cdot\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{n^2-k^2}.$$

Sin embargo, esta igualdad es solamente aproximada, y de ella obtendremos la *exacta* si sustituimos el segundo

miembro por su *límite* al crecer n ilimitadamente. Esto da

$$V = 2R^2H \lim \left[\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2-k^2} \right]. \qquad (23)$$

Aquí, ya por tercera vez, tropezamos con el límite

$$\lim \left[\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2-k^2} \right].$$

Nosotros no sabemos mediante cuáles operaciones de cálculo se puede hallar el límite indicado y, por consiguiente, no podemos resolver el problema por este procedimiento. Por el contrario, comparando las expresiones (22) y (23), podemos determinar la magnitud del límite que nos interesa. Exactamente, reduciendo por $2R^2H$ inmediatamente obtenemos que

$$\lim \left[\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2-k^2} \right] = \frac{1}{3}. \qquad (24)$$

Así, por fin, establecimos este límite.

Volviendo al p. 13 ponemos el límite hallado en la igualdad (15) e, inmediatamente, hallamos la presión incógnita

$$P = \frac{2}{3} R^3.$$

De manera igual, sustituyendo este límite en la igualdad (19) del p. 17, hallaremos el trabajo que nos interesa:

$$T = \frac{2}{3} R^3 H.$$

24. Observaciones generales. Todos los problemas expuestos anteriormente de hecho han sido resueltos por un mismo método. Este método consiste en lo siguiente: la magnitud por hallar se representa en forma de la suma de un gran número de términos muy pequeños de una misma naturaleza. Estos términos pequeños, o «elementales», se calculan aproximadamente de tal manera que se eleve la exactitud de su expresión al aumentar el número de términos. Entonces, toda la magnitud que nos interesa se halla sumando las expresiones de los términos elementales hallados. El valor

obtenido de la magnitud incógnita, sin embargo, es inexacto, y para calcular su valor exacto se tiene que examinar el *límite* de la suma hallada al disminuir ilimitadamente los términos elementales.

En pocas palabras, el método expuesto consiste en representar la magnitud incógnita en forma del *límite de la suma de una cantidad ilimitadamente creciente de términos que decrecen infinitamente*, o, como se dice más frecuentemente, en forma de la *suma de una cantidad ilimitadamente grande de términos ilimitadamente pequeños.*

Este método es uno de los métodos más importantes de la matemática superior, y se estudia en la rama del *cálculo denominado integral.* En esta rama se examinan precisamente los límites de las sumas de cantidades ilimitadamente crecientes de términos que decrecen ilimitadamente. Estos límites se denominan *integrales.* De tal guisa, revisando las soluciones de los problemas de los párrafos anteriores, podemos decir que en cada uno de ellos tuvimos que calcular una u otra integral.

Aquellas sumas que examinamos tenían una forma muy simple. Precisamente, éstas eran sumas de los tres géneros siguientes:

$$\sum_{k=1}^{n} k, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Al calcular cada una de estas sumas hacíamos referencia a la fórmula correspondiente del § 1. Cuando tuvimos que tropezar con la suma de género más complicado:

$$\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2-k^2},$$

solamente el razonamiento artificial nos permitió hallar su límite, así es que si no hubiésemos caído en la buena ocurrencia de resolver el problema de p. 22 por dos procedimientos, no hubiéramos hallado este límite y no hubiéramos resuelto los problemas de p. 13 y p. 17. En el cálculo integral se exponen los procedimientos generales para el cálculo de los límites de sumas incluso de género muy complicado, así que la resolución de semejante tipo de problemas se facilita extraordinariamente y, por decirlo así, «se mecaniza».

Los matemáticos no hallaron de una sola vez estos procedimientos generales, por el contrario, su descubrimiento fue el resultado del trabajo colectivo de muchas decenas de generaciones. Estos procedimientos adquirieron la forma actual en los trabajos de Leibniz (1646-1716) y Newton (1642-1727), aunque, no obstante, la propia idea de la descomposición en un número ilimitadamente grande de términos ilimitadamente pequeños era conocida mucho antes. Hablando en rigor, esta idea ya era conocida por los matemáticos de la Grecia antigua (principalmente por Arquímedes, 287-212 antes de nuestra era). En particular, Arquímedes ya conocía el volumen de la esfera, del cono, de sus partes, e incluso del «segmento cilíndrico».

En la época de la edad media el pensamiento científico se encontraba en estado de profunda decadencia, y solamente a comienzos del siglo XVI reanudaron de nuevo su desarrollo las ciencias naturales y, en particular, las matemáticas. Al comienzo los científicos únicamente descubrieron de nuevo los resultados de la remota antigüedad, pero poco a poco fueron yendo más lejos que los griegos. Esto también se refiere al método de la suma de los infinitesimales que nos interesa. Este método obtuvo un gran adelanto en los trabajos de Kepler «La estereometría de las cubas de vino» (1615) y de Cavalieri «La teoría de los indivisibles» (1635).

No obstante, estos dos últimos autores no lograron tener procedimientos generales para el cálculo de los límites de las sumas o de las integrales. De tal manera, la exposición que se da en nuestro librito, por el carácter del material, se aproxima precisamente a los trabajos de Kepler y de Cavalieri (diferenciándose considerablemente de éstos por la forma de su exposición).

En las investigaciones más avanzadas se hallaron paulatinamente procedimientos más y más generales de cálculos de las integrales y, como ya se dijo, este problema fue resuelto en su conjunto por Leibniz y Newton (el propio término «integral» pertenece a la escuela de Leibniz y fue introducido en el año 1690)[1].

---

[1] El problema general de cálculo de las integrales está muy ligado al problema del cálculo de las funciones derivadas (vean segunda parte del presente libro), y el aparato desarrollado del «cálculo integral» se basa en este ligamento.

25. Principio de Cavalieri. No sabiendo hallar los límites de las sumas de aspecto complicado Cavalieri descubrió un principio muy útil que, en muchos casos, le ayudaba a evitar los cálculos de estas sumas. Este principio tiene la formulación siguiente:

Si dos cuerpos contenidos entre los planos paralelos P y Q (fig. 17) *tienen la propiedad de que al ser cortados por cualquier*

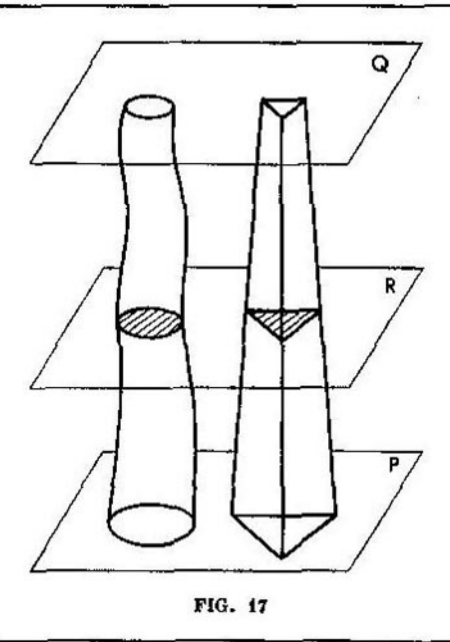


FIG. 17

plano R, paralelo a P y Q, se obtienen siempre figuras equidimensionales, entonces los volumenes de estos cuerpos son iguales.

Para la demostración de este principio tracemos el plano n-1 paralelo a P y Q. Estos planos cortarán ambos cuerpos en n planchas.

Si admitimos con aproximación que estas planchas tienen forma cilíndrica o prismática entonces hallaremos que sus volúmenes son iguales. Por esto mismo, también son iguales los volúmenes de los cuerpos iniciales, ya que ambos se obtienen sumando los volúmenes de las planchas. Esta

igualdad de volúmenes al principio nos la representamos ser solamente aproximada, pero puesto que se efectúa con cualquier grado de exactitud llegamos a convencernos de que es absolutamente exacta.

Es fácil generalizar este principio demostrando que si en los cortes de ambos cuerpos se obtienen figuras cuyos áreas

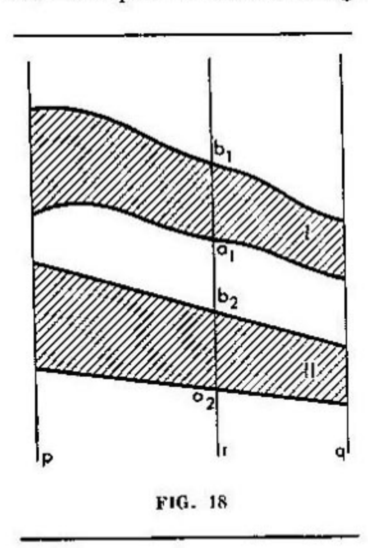


FIG. 18

se encuentran en una misma *relación*, los volúmenes de los cuerpos también se encuentran en esta misma relación. No es difícil establecer también este mismo principio para las áreas.

La formulación del principio para este caso es la siguiente: *Si dos figuras planas I y II contenidas entre las rectas paralelas p y q* (fig. 18) *tienen la propiedad de que en su intersección por cualquier recta r, paralela a p y q, se obtienen segmentos de una misma longitud, entonces las áreas de estas figuras son iguales.*

Si la relación de los segmentos a_1b_1 y a_2b_2 es igual al número k, que no depende de la posición de la recta r, entonces la relación del área de la figura I respecto al área de la figura II también es igual a k.

La demostración de estas afirmaciones se realiza por el mismo esquema que se efectuó para el caso de los volúmenes, y puede ser propuesta al lector.

§ 5. LA PARABOLA Y LA ELIPSE

26. El área de la parábola. Examinemos la línea cuya ecuación en el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares es

$$y = ax^2. \quad (25)$$

Esta línea se denomina *parábola*[1] y tiene el aspecto expuesto en la fig. 19 (consideramos que $a > 0$). Elijamos en

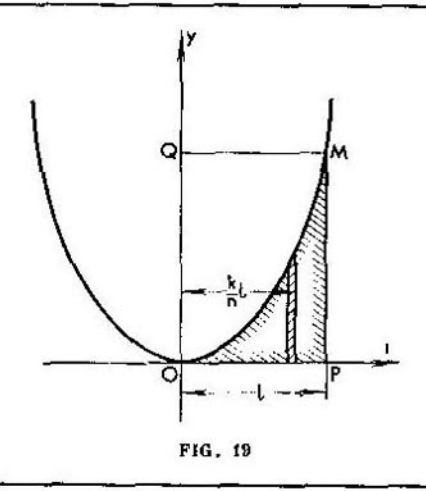


FIG. 19

la parábola cierto punto arbitrario M y tracemos desde éste la perpendicular MP al eje Ox.

Planteemos el problema de calcular el área F del triángulo curvilíneo OMP.

Para la resolución de este problema dividamos el segmento OP en n partes iguales y levantemos desde los puntos divisores perpendiculares hasta su intersección con la parábola. Estas perpendiculares cortarán el área incógnita en n bandas

[1] En el § 7 de la 5ª parte de este libro se da otra definición, por así decir, la «pura geométrica».

verticales estrechas. Con aproximación se puede considerar que estas bandas elementales son rectángulos. Calculemos su área en esta suposición.

Designemos por l toda la longitud OP y examinemos la k-a banda. Su anchura es igual a $\frac{1}{n}\,l$. En lo que se refiere a su altura ésta se halla partiendo de los razonamientos siguientes: la distancia de la banda respecto al eje Oy es igual a $\frac{k}{n}\,l$ y, puesto que su extremo superior yace en la parábola, la altura de la banda que es igual a la ordenada del punto de la parábola según la ecuación (25), y es

$$a\left(\frac{k}{n}\,l\right)^2.$$

De aquí que el área de la banda es

$$al^3\,\frac{k^2}{n^3},$$

y el área de todo el triángulo OMP es la suma

$$F=\sum_{k=1}^{n} al^3\,\frac{k^2}{n^3},$$

ó

$$F=al^3\cdot\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

o, por fin,

$$F=\frac{al^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Para obtener de aquí la igualdad exacta es necesario aumentar ilimitadamente el número n. En el límite hallamos

$$F=\frac{al^3}{3}.$$

A este resultado se le puede dar una formulación geométrica simple. Precisamente, examinemos el *rectángulo* $OQMP$. Su área, como es evidente, es igual a $OP\cdot PM$. Pero $OP=l$; en lo que se refiere a PM resulta que es la *ordenada* del punto M, cuya *abscisa* es l, así que de la ecuación de la parábola se deduce que $PM=al^2$.

Por esto el área $OQMP$ es al^3 y, por consiguiente, *el área del triángulo OMP es igual a un tercio del área del rectángulo $OQMP$*. De aquí que el área del triángulo OQM es igual a dos tercios del área de este mismo rectángulo.

Estos resultados tan elegantes fueron calculados por primera vez por Arquímedes.

El cálculo de la magnitud de cualquier área generalmente se denomina *cuadratura* de este área (pues consiste en compararla con el área del *cuadrado*). De este modo hemos realizado la cuadratura de la parábola.

27. Volumen del paraboloide de revolución. Supongamos que la parábola examinada en el punto anterior gira alrededor

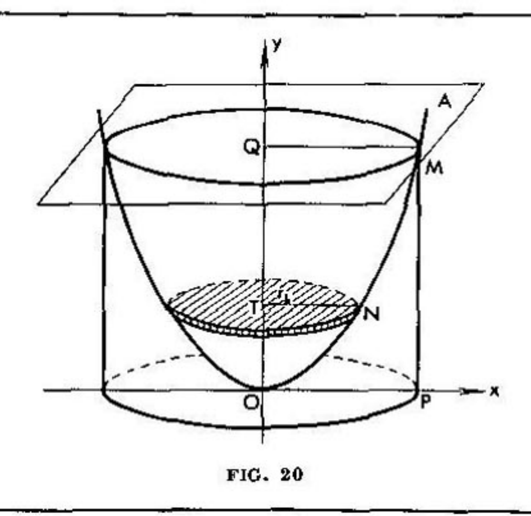


FIG. 20

del eje Oy (fig. 20). La superficie que con esto se obtiene se denomina *paraboloide de revolución*. Examinemos el plano A, perpendicular al eje Oy, y calculemos el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide y por este plano.

Con dicho fin dividamos el segmento[1] OQ en n partes iguales y tracemos por los puntos divisores planos paralelos al plano A. Estos planos cortarán el cuerpo que nos interesa en n capas cada una de las cuales admitiremos ser aproxima-

[1] Nos atenemos a las designaciones de la fig. 20.

damente un cilindro. Si, como antes, designamos por l la distancia OP, hallaremos que $OQ = al^2$. Por consiguiente, la altura de cada cilindro elemental es $\frac{1}{n}\, al^2$.

Para calcular el radio del k-o cilindro procederemos de la manera siguiente: este radio $r_k = NT$, evidentemente, representa en sí la abscisa del punto N de la parábola. Puesto que la ordenada de este punto es

$$\frac{k}{n}\, OQ = \frac{k}{n}\, al^2,$$

hallaremos de la ecuación de la parábola que

$$\frac{k}{n}\, al^2 = ar_k^2,$$

de donde

$$r_k^2 = \frac{k}{n}\, l^2,$$

y el área de la base del k-o cilindro es

$$\pi r_k^2 = \pi l^2 \frac{k}{n}.$$

De aquí el volumen elemental es

$$V_k = a\pi l^4 \frac{k}{n^2}.$$

Quiere decir que todo el volumen buscado V es

$$V = a\pi l^4 \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k,$$

de donde, después de simples cálculos, hallaremos

$$V = a\pi l^4 \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Aumentando ilimitadamente n hallaremos el valor exacto del volumen del paraboloide de revolución:

$$V = \frac{1}{2}\, \pi a l^4.$$

Comparemos este volumen con el volumen de un cilindro con radio $R = OP$ y altura $H = OQ$. Su volumen es

$$\pi R^2 H = \pi\, (OP)^2 \cdot OQ = \pi l^2 \cdot al^2 = \pi a l^4.$$

De tal manera tenemos el ***teorema de Arquímedes:***
El volumen del paraboloide de revolución es igual a la mitad del volumen del cilindro con la misma base y de la misma altura.

28. La elipse y su área. Examinemos una curva muy importante denominada *elipse*. Su definición es la siguiente: *la elipse es un círculo comprimido*. Explicaremos esta expresión.

Examinemos una circunferencia de cierto radio a. Supongamos que ésta se encuentra en el plano en el que se han

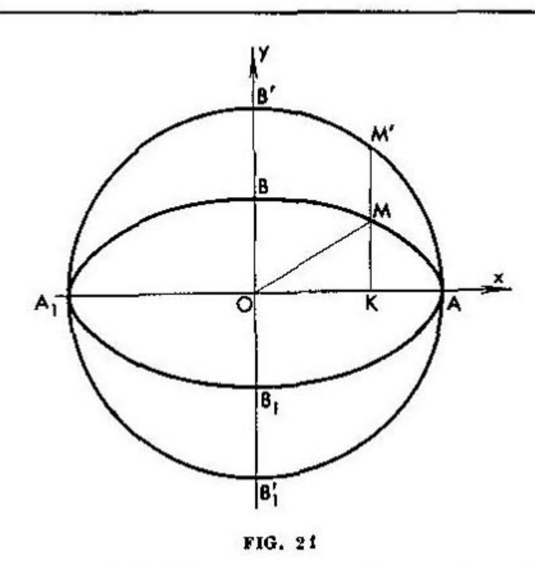


FIG. 21

trazado las coordenadas cartesianas rectangulares y que su centro coincide con el origen de las coordenadas (fig. 21). Sea, a continuación, que las ordenadas KM' de todos los puntos M' de la circunferencia han sido acortadas en un mismo número de veces, y que el coeficiente de compresión es $q < 1$:

$$KM : KM' = q.$$

Esta operación de acortamiento transformará al círculo $A_1B'AB'_1$ en cierta otra figura denominada elipse. Deducire-

mos la ecuación de la elipse. Si designamos las coordenadas del punto M de la elipse por x e y hallaremos de acuerdo con la definición de la elipse:

$$y = q \cdot KM'.$$

Pero, según el teorema de Pitágoras

$$KM' = \sqrt{(OM')^2 - (OK)^2} = \sqrt{a^2 - x^2},$$

así que

$$y = q\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Si designamos por b el segmento OB, de la definición de la elipse, tendremos

$$b : a = OB : OB' = q,$$

así que

$$q = \frac{b}{a},$$

y la ecuación de la elipse adquiere la forma:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

de donde

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{a^2}(a^2 - x^2)$$

y, definitivamente,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Esta es la denominada ecuación «canónica» o «simplísima» de la elipse.

Calculemos el área de la elipse. Utilizando la observación al principio de Cavalieri, que se hizo a final del p. 25, podemos decir de inmediato que *la relación del área de la elipse respecto al área del círculo es igual al coeficiente de compresión q*, así que, designando por F el área de la elipse, tenemos:

$$F : \pi a^2 = q,$$

ó

$$F = q\pi a^2.$$

Poniendo aquí el valor $q = \frac{b}{a}$ hallaremos definitivamente que

$$F = \pi ab.$$

Sirviéndose del principio de Cavalieri también hallaremos fácilmente el volumen del *elipsoide de revolución*, es decir, del cuerpo generado por la rotación de la elipse alrededor del eje Ox (fig. 22). Exactamente, la relación de los radios de los círculos que se obtienen en la intersección del elipsoide con

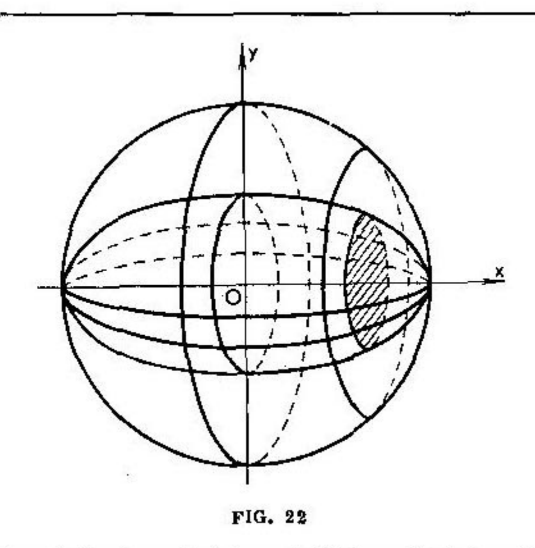


FIG. 22

los planos paralelos al eje Ox respecto a los radios de las secciones de la esfera con los mismos planos, es igual a q. Por consiguiente, la relación de sus áreas es igual a q^2. Según el principio de Cavalieri también es la misma la relación de los volúmenes.

Así pues,

$$V : \frac{4}{3}\pi a^3 = q^2 = \frac{b^2}{a^2},$$

siendo

$$V = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

§ 6. LA SINUSOIDE

29. Acerca de una suma trigonométrica. Para la exposición ulterior necesitamos la expresión de la suma siguiente:

$$S=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen} k\alpha=\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}2\alpha+\ldots+\operatorname{sen}n\alpha, \qquad (26)$$

donde α es cierto ángulo determinado.

Para hallar esta suma multiplicaremos ambos miembros de la igualdad (26) por $2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$:

$$2S\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}+2\operatorname{sen}2\alpha\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}+\\ +\ldots+2\operatorname{sen}n\alpha\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$

y aplicaremos a cada término del primer miembro la conocida fórmula $2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$.

Esto da

$$2S\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\left[\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3}{2}\alpha\right]+\left[\cos\frac{3}{2}\alpha-\cos\frac{5}{2}\alpha\right]+\ldots\\ \ldots+\left[\cos\frac{2n-1}{2}\alpha-\cos\frac{2n+1}{2}\alpha\right].$$

Es fácil ver que el primer término de cada corchete (excepto el primero) se reduce con el segundo término del corchete anterior. De tal guisa,

$$2S\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}\alpha. \qquad (27)$$

Aplicando la conocida fórmula

$$\cos A-\cos B=2\operatorname{sen}\frac{B-A}{2}-\operatorname{sen}\frac{A+B}{2},$$

representaremos (27) en la forma

$$2S\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=2\operatorname{sen}\frac{n\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{(n+1)\alpha}{2},$$

de donde

$$S=\frac{\operatorname{sen}\frac{n\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}.$$

Así,

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k\alpha = \frac{\operatorname{sen}\frac{n\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}. \tag{28}$$

Esta es precisamente la fórmula que queríamos establecer.

30. La desigualdad auxiliar. Designemos por α un ángulo arbitrario[1] que satisface la condición $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

En este caso tiene lugar la siguiente desigualdad doble:

$$\operatorname{tg}\alpha > \alpha > \operatorname{sen}\alpha. \tag{29}$$

Para la demostración de esta afirmación examinemos la fig. 23. De esta figura vemos directamente que el triángulo

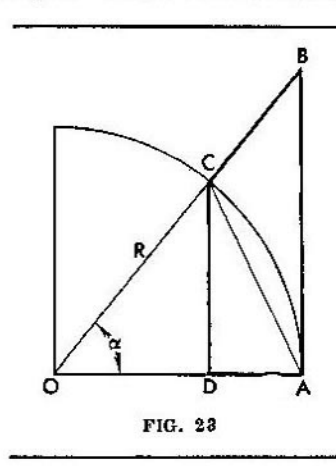


FIG. 23

OCA está abarcado absolutamente por el sector *OCA*, el cual, a su vez, está comprendido por completo en el triángulo *OAB*. De aquí se desprende que para las áreas de estas figuras son válidas las desigualdades: área $\Delta\, OAB >$ área del sector $OCA >$ área $\Delta\, OCA$.

O sea,

$$\frac{1}{2}OA\cdot AB > \frac{1}{2}R\cdot \overset{\frown}{CA} > \frac{1}{2}OA\cdot CD.$$

[1] Más exactamente, α es la magnitud del ángulo en radianes.

Pero,

$$OA = R, \quad AB = R \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\overset{\frown}{CA} = R\alpha, \quad CD = R \operatorname{sen} \alpha,$$

así que

$$\frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} \alpha > \frac{1}{2} R^2 \alpha > \frac{1}{2} R^2 \operatorname{sen} \alpha.$$

Reduciendo esta desigualdad doble por el factor positivo $\frac{1}{2} R^2$ obtenemos precisamente la desigualdad (29).

31. El seno de un ángulo infinitamente pequeño. Supongamos que el ángulo α tiende a cero adquiriendo sucesivamente los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$

En este caso es válida la fórmula

$$\boxed{\operatorname{lím} \frac{\operatorname{sen} \alpha_n}{\alpha_n} = 1} \qquad (30)$$

que es una de las fórmulas más importantes de las matemáticas.

Es útil recordar la expresión verbal de la fórmula (30): *el límite de la relación del seno de un ángulo infinitamente pequeño respecto a la magnitud de este ángulo en radianes es igual a la unidad.*

Para la demostración de esta fórmula podemos admitir que todos los valores de α_n son positivos, pues la magnitud de la relación $\frac{\operatorname{sen} \alpha_n}{\alpha_n}$ no varía al sustituir α_n por $-\alpha_n$. Además, se puede considerar que $\alpha_n < \frac{\pi}{2}$, ya que esto, en todo caso, es así para valores de n suficientemente grandes.

De esta forma,

$$0 < \alpha_n < \frac{\pi}{2},$$

y entonces, en virtud de (29),

$$\operatorname{tg} \alpha_n > \alpha_n > \operatorname{sen} \alpha_n,$$

de donde, dividiendo todos los miembros de la desigualdad por el número positivo $\operatorname{sen} \alpha_n$, obtenemos:

$$\frac{1}{\cos \alpha_n} > \frac{\alpha_n}{\operatorname{sen} \alpha_n} > 1.$$

Para las magnitudes inversas de éstas son válidas las desigualdades de sentido opuesto:

$$\cos \alpha_n < \frac{\operatorname{sen} \alpha_n}{\alpha_n} < 1. \tag{31}$$

Según las condiciones, el ángulo α_n tiende a cero. Pero, el coseno de este ángulo (como es fácil ver en la figura) tiende a la unidad:

$$\text{lím}\,[\cos \alpha_n] = 1$$

y, puesto que, de acuerdo a (31), el quebrado $\frac{\operatorname{sen} \alpha_n}{\alpha_n}$ se encuentra entre la unidad y el $\cos \alpha_n$, entonces dicho quebrado debe también aproximarse a la unidad, con lo que queda demostrada la fórmula (30).

32. La cuadratura de la sinusoide. Examinemos la curva cuya ecuación es

$$y = \operatorname{sen} x. \tag{32}$$

Esta aparece tal y como se expone en la fig. 24 y se denomina *sinusoide*.

Calculemos el área de la figura limitada por el tramo de la sinusoide desde $x = 0$ hasta $x = \pi$ y el eje de las abscisas (esta figura está sombreada en la fig. 24).

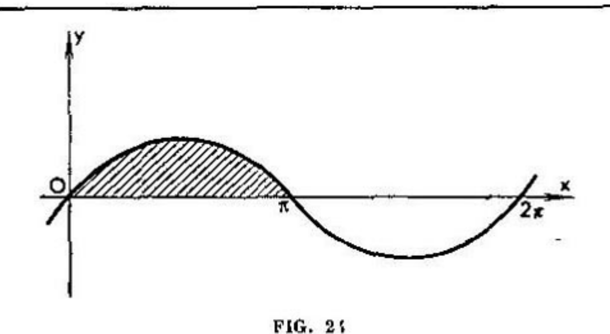


FIG. 24

Con dicho fin, como siempre, dividiremos el segmento del eje de las abscisas desde $x = 0$ hasta $x = \pi$ en n partes por los puntos

$$x_1 = \frac{\pi}{n}, \quad x_2 = \frac{2\pi}{n}, \; \ldots, \; x_n = \frac{n\pi}{n}$$

y levantaremos perpendiculares desde estos puntos hasta la intersección con la sinusoide. Las longitudes de estas perpendiculares se hallan por la ecuación (32) y resultan ser iguales a

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{n},\quad \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n},\quad \operatorname{sen}\frac{3\pi}{n},\quad \ldots,\quad \operatorname{sen}\frac{n\pi}{n}$$

(así que la última de ellas es igual a cero). Estas perpendiculares cortan toda la figura en n bandas de $\frac{\pi}{n}$ de ancho de cada una. Admitiendo que cada una de estas bandas es un rectángulo con base $\frac{1}{n}\pi$ y altura (para la k-a banda de la izquierda) igual al sen $\frac{k\pi}{n}$, tendremos la expresión aproximada del área de la k-a banda elemental

$$F_k = \frac{\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}.$$

De aquí que el área de toda la figura que nos interesa aproximadamente es igual a

$$F = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}.$$

Esta expresión, basándose en la fórmula (28) del p. 29, también se puede representar así:

$$F = \frac{\pi}{n}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{(n+1)\pi}{2n}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}},$$

ó (puesto que el sen $\frac{\pi}{2} = 1$) así:

$$F = \frac{\pi}{n}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{(n+1)\pi}{2n}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}}. \tag{33}$$

La expresión exacta del área es el límite del segundo miembro de la igualdad (33) cuando n crece ilimitadamente. Este límite se halla partiendo de los razonamientos siguientes.

Es obvio que

$$\frac{(n+1)\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}.$$

así que este ángulo se aproxima a $\frac{\pi}{2}$, y por esto, como se ve fácilmente de la figura, su seno debe aproximarse a la unidad:

$$\lim \operatorname{sen} \frac{(n+1)\pi}{2n} = 1. \tag{34}$$

Por otro lado, el ángulo $\alpha_n = \frac{\pi}{2n}$ se aproxima a cero y, por consiguiente, en virtud de la fórmula (30) del p. 31,

$$\lim \left[\frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2n}} \right] = \lim \left[2 \frac{\alpha_n}{\operatorname{sen} \alpha_n} \right] = 2. \tag{35}$$

De (34) y (35) (basándose en el teorema del límite del producto) hallamos definitivamente que

$$F = 2.$$

Así pues, el área limitada por una *semionda de la sinusoide y la cuerda que tiende esta semionda es igual a dos.*

33. Volumen del cuerpo de revolución de la sinusoide. Supongamos que la sinusoide expuesta en la fig. 24 gira

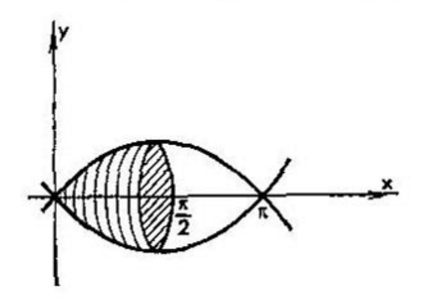


FIG. 25

alrededor del eje Ox. Hallemos el volumen del cuerpo limitado por la superficie generada por la rotación de una semionda de la sinusoide.

Con este fin tracemos a través del punto $x = \frac{\pi}{2}$ un plano perpendicular al eje Ox. Es evidente que este plano (fig. 25) cortará nuestro cuerpo en dos partes iguales. Hallemos el

volumen V^* de la mitad izquierda del cuerpo que nos interesa. Dividiendo el segmento del eje Ox desde $x = 0$ hasta $x = \frac{\pi}{2}$ en n partes por puntos de género

$$x_k = k\frac{\pi}{2n} \quad (k = 1, 2 \ldots, n),$$

trazaremos a través de estos puntos los planos perpendiculares al eje Ox. Estos planos se cortarán con nuestra superficie por círculos de radio (para el k-o plano)

$$r_k = \operatorname{sen}\frac{k\pi}{2n}.$$

Examinando la capa elemental que se encuentra entre los planos (k-1) y k como un cilindro de radio r_k y altura $h = \frac{\pi}{2n}$, hallamos el volumen elemental

$$V_k = \pi r_k^2 h = \frac{\pi^2}{2n}\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{2n},$$

de donde todo el volumen de la mitad izquierda del cuerpo aproximadamente es igual a

$$V^* = \frac{\pi^2}{2n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{2n}.$$

El valor exacto del volumen es el límite de esta expresión cuando n crece ilimitadamente:

$$V^* = \lim\left[\frac{\pi^2}{2n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{2n}\right]. \tag{36}$$

Para calcular este límite emplearemos un procedimiento artificial que permite reducir considerablemente los cálculos (teniendo en cuenta este procedimiento comenzamos precisamente por examinar no todo el cuerpo, sino solamente su mitad izquierda).

El procedimiento consiste en lo siguiente: conjuntamente con la sinusoide (32) examinemos la curva que es la gráfica de la función

$$y = \cos x. \tag{37}$$

Si tenemos presente que

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

es fácil darse cuenta de que la curva (37) es la misma sinusoide (32), pero desplazada a lo largo del eje Ox *hacia la izquierda*, en $\frac{\pi}{2}$ (fig. 26).

Supongamos ahora que hacemos girar esta sinusoide alrededor del eje Ox. Es obvio que el volumen del cuerpo genera-

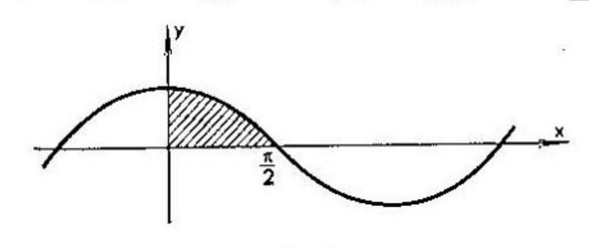


FIG. 26

do por la rotación de la figura sombreada en la fig. 26 es igual al volumen V^* de la mitad izquierda de nuestro cuerpo primario (ya que éste coincide *exactamente* con el volumen de la mitad *derecha* del cuerpo inicial).

Por otra parte, si comenzásemos a calcular este volumen por el método de totalización alcanzaríamos evidentemente un límite análogo al (36), sustituyendo, sin embargo, todos los senos por los cosenos, es decir, obtendríamos que

$$V^* = \text{lím}\left[\frac{\pi^2}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{2n}\right]. \qquad (38)$$

Así pues, una misma magnitud V^* puede ser representada de dos formas:

$$V^* = \text{lím}\left[\frac{\pi^2}{2n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{2n}\right] = \text{lím}\left[\frac{\pi^2}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{2n}\right].$$

Sumando estas dos expresiones (lo que, por lo visto, se puede efectuar bajo el signo del límite) obtenemos:

$$2V^* = \text{lím}\left[\frac{\pi^2}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\text{sen}^2\frac{k\pi}{2n}+\cos^2\frac{k\pi}{2n}\right)\right]. \qquad (39)$$

Pero

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

así que cada termíno de la suma (39) es igual a la unidad y, puesto que el número de términos es n, entonces

$$2V^* = \text{lím}\left[\frac{\pi^2}{2n}\cdot n\right] = \text{lím}\left(\frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2},$$

ya que cualquier magnitud constante sirve de límite a sí misma.

El volumen V^* de la mitad izquierda del cuerpo se obtiene de aquí dividiendo por dos, pero como desde un principio nos interesaba el volumen de todo el cuerpo, no es menester dividir por dos, y el resultado definitivo es

$$V = 2V^* = \frac{\pi^2}{2}. \qquad (40)$$

De esta forma, *el volumen del cuerpo limitado por la superficie generada por la rotación de la semionda de la sinusoide alrededor de su cuerda es igual a* $\frac{\pi^2}{2}$.

34. Valores medios. Supongamos que cierta magnitud y adquiere un número finito de valores:

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n.$$

En este caso la media aritmética

$$y_* = \frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}$$

de estos números y_k lleva el nombre de *valor medio* de la magnitud y. La utilidad del examen de esta magnitud radica en dos de sus propiedades.

A. *Si todos los valores de la magnitud y se encuentran entre los números m y M, entonces su valor medio también está comprendido entre estos mismos números, es decir, si*

$$m \leqslant y_k \leqslant M \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (41)$$

entonces también

$$m \leqslant y_* \leqslant M.$$

B. *Si todos los valores de la magnitud y son iguales a un mismo número h, entonces su valor medio también es iqual a este número.*

La propiedad **B** es evidente, pero para la demostración de la propiedad **A** es necesario sumar todas las desigualdades (41), lo que da

$$nm \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k \leqslant nM,$$

y dividir por n la desigualdad obtenida.

A la par del valor medio y_* de la magnitud y frecuentemente se examina la *media cuadrática* y^* de esta misma magnitud. Esta media se determina por la igualdad

$$y^* = \sqrt{\frac{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}{n}}. \tag{42}$$

En otras palabras, *la media cuadrática de la magnitud y es la raíz cuadrada del valor medio de la magnitud* y^2.

Es fácil demostrar que si todos los valores de la magnitud y no son negativos, entonces su media cuadrática tiene las mismas propiedades **A** y **B** que la media aritmética.

En realidad, si

$$0 \leqslant m \leqslant y_k \leqslant M \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

entonces

$$m^2 \leqslant y_k^2 \leqslant M^2 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Sumando todas estas desigualdades, dividiendo el resultado por n y extrayendo la raíz cuadrada, obtenemos

$$m \leqslant y^* \leqslant M,$$

es decir, hemos demostrado que y^* tiene la propiedad **A**. La propiedad **B** es obvia.

En los casos que examinamos la magnitud y adquiría un número finito de valores. En las cuestiones aplicadas la mayoría de las veces se tienen que examinar magnitudes que varían continuamente. Para el cálculo de semejantes magnitudes medias es menester aplicar el método de la suma de los infinitesimales. Ilustraremos esto con un ejemplo de la rama física.

35. Intensidad efectiva de la corriente. Examinemos la corriente alterna sinusoidal

$$I = A \operatorname{sen} t, \tag{43}$$

donde t es el tiempo, I es la intensidad de la corriente. En los diferentes momentos de tiempo la magnitud I tiene diferentes valores, siendo su máximo valor igual a A

$$I_{\text{máx}} = A. \tag{44}$$

En la electrotécnica juega un papel importante la media cuadrática I_e de la intensidad de la corriente durante el tiempo igual al período de oscilación, es decir, durante el tiempo desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$.

Resulta que al medir con el amperímetro la intensidad de la corriente este último indicará precisamente la magnitud I_e. Esta magnitud se denomina *intensidad efectiva de la corriente.*

Calculemos I_e para la corriente (43).

Con este fin dividamos el intérvalo de tiempo desde el momento $t = 0$ hasta el momento $t = 2\pi$ en n intérvalos pequeños por los momentos

$$t_k = \frac{2\pi}{n} k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Si el número n es muy grande, entonces se puede considerar aproximadamente que durante el intérvalo de tiempo desde el momento t_{k-1} hasta el momento t_k la intensidad de la corriente no tiene tiempo para variar y es igual a su valor en el momento t_k

$$I_k = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} k.$$

De otro modo, admitimos que durante un intérvalo elemental de tiempo la corriente es constante. Con esta admisión simplificadora la intensidad efectiva de la corriente será igual a

$$I_e = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} I_k^2}{n}} = \sqrt{\frac{A^2 \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi}{n} k}{n}}. \tag{45}$$

El valor verdadero de I_e es el *límite* del segundo miembro de la igualdad (45) cuando n crece ilimitadamente:

$$I_e = \text{lím}\left[A\cdot\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\text{sen}^2\frac{2\pi}{n}}\right].$$

Calculemos el límite de la expresión subradical

$$\text{lím}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\text{sen}^2\frac{2\pi}{n}k\right]. \qquad (46)$$

Esto se puede hacer sin cálculo alguno por el procedimiento siguiente.

Supongamos que quisiéramos hallar el volumen del cuerpo generado por la rotación de una *onda* de la sinusoide (32) alrededor del eje Ox.

Si empleamos el método de la suma de los infinitesimales entonces, repitiendo los razonamientos del p. 33, representaremos este volumen en la forma

$$\text{lím}\,\frac{2\pi^2}{n}\sum_{k=1}^{n}\text{sen}^2\frac{2k\pi}{n}.$$

Por otro lado, este volumen, evidentemente, es dos veces superior al volumen (40) del cuerpo que se obtiene al girar la *semionda* de la sinusoide, es decir, el volumen buscado es igual a π^2.

Así,

$$\text{lím}\left[\frac{2\pi^2}{n}\sum_{k=1}^{n}\text{sen}^2\frac{2k\pi}{n}\right] = \pi^2. \qquad (47)$$

Es fácil comprender que el límite (46) se obtiene del límite (47) dividiendo por $2\pi^2$, de donde se deduce que

$$\text{lím}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\text{sen}^2\frac{2k\pi}{n}\right] = \frac{1}{2}.$$

En este caso[1]

$$I_e = A\sqrt{\frac{1}{2}}. \tag{48}$$

Esta fórmula resuelve precisamente el problema.

Si comparamos las fórmulas (48) y (44) veremos que

$$I_{\text{máx}} = I_e\sqrt{2},$$

es decir, la intensidad máxima de la corriente es aproximadamente una vez y media superior a aquella que marca el amperímetro.

---

[1] Aquí hacemos uso del teorema siguiente: si una magnitud variable $x_n \geqslant 0$ se aproxima al límite a entonces $\sqrt{x_n}$ se aproxima a $\sqrt{a}$.

EJEMPLOS PARA EJERCICIOS

Daremos cierto número de ejemplos para ejercitarse individualmente en los métodos expuestos. Aconsejamos con insistencia al lector que realice estos ejercicios. Como enunció Newton «en las matemáticas los ejemplos son más provechosos que las reglas».

1) Calcular la suma

$$S_4 = \sum_{k=1}^{n} k^4.$$

Solución. $S_4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

2). Calcular el área de un triángulo rectángulo por el método de sumar.

3) Hallar el área limitada por el eje Ox, la curva $y = x^3$ y la recta $x = 1$.

Solución. $\dfrac{1}{4}$.

4) Hallar el límite $\lim \left[\dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}\right]$ cuando n crece ilimitadamente.

Indicación. Calcular el área del cuadrante del círculo sumando las bandas rectangulares.

Solución. $\dfrac{\pi}{4}$.

5) Partiendo del resultado del problema anterior hallar el volumen del cilindro dividiéndolo en planchas rectangulares tal y cómo está indicado en la fig. 9.

6) Calcular la presión que ejerce el agua de un vaso cilíndrico sobre las paredes de éste.

Solución. $P = \pi R H^2$.

7) Hallar el trabajo que se gasta en extraer el agua de un recipiente cónico cuya base es horizontal y se encuentra *por debajo* del vértice.

Solución. $T = \dfrac{1}{4}\pi R^2 H^2$.

8) Determinar el volumen de la elipsoide de revolución calculando directamente sin alegar al principio de Cavalieri.

9) Hallar el volumen de la elipsoide generada por la rotación de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor del eje de ordenadas.

Solución. $V = \dfrac{4}{3}\pi a^2 b$.

10) ¿Qué trabajo es necesario gastar para la extracción del agua de una semiesfera cuyo plano diametral está dirigido hacia abajo?

Solución. $T = \dfrac{5}{12}\pi R^4$.

11) Calcular la presión del agua sobre las paredes de un recipiente prismático de altura H y perímetro de la base p.

Solución. $P = \frac{1}{2}pH^2$.

12) Basándose en el resultado del ejercicio 1 hallar el volumen del cuerpo limitado entre la superficie que se obtiene al girar la parábola $y = ax^2$ alrededor del eje Ox, y el plano perpendicular al eje Ox que dista del origen a la distancia h.

Solución. $V = \frac{1}{5}\pi a^2 h^5$.

13) Hallar el límite

$$\text{lím}\left[\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n} k^p\right]$$

cuando n crece ilimitadamente (el número p es entero positivo).

Solución. $\frac{1}{p+1}$.

14) Hallar el límite

$$\text{lím}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\right]$$

cuando n crece ilimitadamente.

Indicación. Hallar el área del triángulo curvilíneo OQM (fig. 19) dividiéndolo en bandas paralelas al eje Ox.

Solución. $\frac{2}{3}$.

15) Hallar la suma

$$S = \sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha.$$

Solución. $S = \frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{2}$.

16) Empleando el resultado anterior hallar el área F de la figura limitada por la curva $y = \cos x$ y los ejes de las coordenadas.

Solución. $F = 1$.

A NUESTROS LECTORES:

LIBROS DE RECIENTE PUBLICACION:

CURVAS MARAVILLOSAS

Existen muchas curvas (secciones cónicas, óvalos, espirales, etc.) que, además de tener interés por sí mismas debido a sus numerosas e importantes propiedades, encuentran amplia aplicación en la Ciencia y la Técnica.

Es conveniente que los alumnos vayan familiarizándose con estas curvas y sus propiedades, máxime teniendo en cuenta que el curso escolar centra la atención en el estudio de la recta y de la circunferencia.

El libro de A. I. Markushévich, conocido pedagogo y científico soviético, persigue precisamente este fin. En una forma muy accesible se dan las definiciones de algunas curvas notables (elipse, parábola, hipérbola, lemniscata y cicloide), se exponen sus propiedades principales y se explica la importancia que tienen.

Basado en una conferencia dictada por el autor a un grupo de escolares moscovitas de séptimo y octavo grados, el libro está orientado precisamente a este círculo de lectores. Los temas que en él se tratan pueden ser utilizados en los círculos matemáticos escolares. Por otra parte, será bien recibido por todos los que estén interesados en ampliar sus conocimentos matemáticos adquiridos en la escuela.

NUMEROS COMPLEJOS
Y REPRESENTACIONES CONFORMES

Esta obra se debe al vicepresidente de la Academia de Ciencias pedagógicas de la URSS, Doctor en Ciencias físico-matemáticas, catedrático Alexéi Markushévich.
En este pequeño trabajo el autor desarrolla la teoría de los números complejos y funciones más sencillas de los primeros (incluyendo la función de N. E. Zhukovski, aplicándola al diseño del perfil de un ala de avión). La exposición se da en forma geométrica. Los números complejos se consideran como segmentos dirigidos y las funciones como representaciones. Para llegar a tal comprensión de los números complejos hay que empezar por la interpretación geométrica de los números reales y de las operaciones con los mismos.
El libro ha sido escrito a base de las clases que dictaba el autor a los alumnos de grados superiores de la secundaria y no exige por parte del lector, conocimientos previos de los números complejos.
Este pequeño trabajo está destinado para los escolares y los estudiantes menores, así como para un amplio círculo de lectores de diferentes especialidades.

QUE ES PROGRAMACION LINEAL

Esta edición forma parte de la pequeña biblioteca de "Lecciones de divulgación sobre Matemáticas". El libro da a conocer al lector una parte importante de las matemáticas, la programación lineal, rama que ha obtenido en los últimos años una amplia aplicación en diferentes terrenos de la economía, la técnica, el arte militar, etc.

En el libro se plantea el problema general de la programación lineal, se analizan los métodos de su resolución y la aplicación a problemas económicos concretos. Se examina el empleo de la teoría de la programación lineal para resolver problemas de transporte con costo y tiempo mínimos. También se presentan procedimientos de solución del problema tomando en consideración estos dos factores.

El contenido del libro se dirige a los matemáticos, ingenieros y economistas dedicados a problemas de planificación con métodos matemáticos, en particular, cuando se emplean máquinas computadoras digitales electrónicas.

УДК 512(023) = 60

ИБ № 728

И. П. Натансон

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ
НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

Редактор И. Данилова
Художник А. Г. Антонова
Художественный редактор Е. И. Подмарькова
Технический редактор Т. А. Максимова
Корректор Г. Власова

Сдано в набор 22/XII 1976 г.
Подписано к печати 11/III 1977 г.
Бумага типографская № 1 84×108 1/32=1,75 бум. л.
5,88 усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 4,09. Изд. № 19/8179
Цена 37 коп. Зак. № 01669.
Тираж 12.000 экз.
Темплан изд-ва «Мир» 1977 г., пор. № 319

Издательство «Мир»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Московская типография № 7 «Искра революции»
Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9.

Н $\frac{20202-319}{041(01)-77}$ 319—77